

Topologische Modelle von reellen K3-Flächen und eine Methode von Viro

Diplomarbeit von
FLORIAN SCHWERTECK

Betreuer
PROF. DR. VICTOR BATYREV

Mathematisches Institut
EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Ich versichere hiermit, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Tübingen, den 15. Dezember 2004,

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
I Grundlagen	11
1.1 Mannigfaltigkeiten	11
1.2 Algebraische Varietäten	17
1.3 Divisoren	19
1.4 Kurven	21
II Die Viro-Methode	29
2.1 Asymptotisches Verhalten	30
2.2 Karten	35
2.3 Triangulationen	42
2.4 Der Patchworksatz	44
III Kurven und Flächen	53
3.1 Die Fundamentalgruppe	53
3.2 Überlagerungen	54
3.3 Homologie und Kohomologie	56
3.4 K3-Flächen	60
IV Realisierung reeller K3-Flächen	69
4.1 Überlagerungen	69
4.2 Realisierungen	73
4.3 Triangulationen	74
4.4 Abschließende Bemerkungen	83
Anhang: Konstruktionen	85
Literaturverzeichnis	123
Liste der Bezeichnungen	125

Einführung

Die algebraische Geometrie beschäftigt sich mit dem Studium von Nullstellen von Polynomen. Liegen die Koeffizienten der Polynome in einem Körper \mathbb{K} , so nennen wir deren Nullstellengebilde *algebraische Varietät über \mathbb{K}* . Allerdings müssen wir auch spezifizieren, wo diese Nullstellen liegen sollen. Im natürlichsten Fall nimmt man den affinen Raum \mathbb{K}^n für geeignetes $n \in \mathbb{N}$, dieses Konzept läßt sich allerdings in zwei Richtungen erweitern: Zum einen können wir die Nullstellen in einer beliebigen Körpererweiterung \mathbb{K}' von \mathbb{K} betrachten, zum anderen können wir die Varietät kompaktifizieren, wenn wir als umgebenden Raum den projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ wählen. Die Wahl der zugrundeliegenden Körper unterliegt prinzipiell keinerlei Einschränkungen, eine allgemeine Theorie muß das natürlich berücksichtigen. Legt man sich hier fest, so sind die Ergebnisse zwar nicht mehr allgemeingültig, allerdings kann man nun die speziellen Eigenschaften des Körpers ausnutzen und so zusätzliche Resultate erhalten. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Körper \mathbb{K}' eine Topologie besitzt. Eine algebraische Varietät V wird auf diese Weise zu einem topologischen Raum, der mit Mitteln der algebraischen Topologie untersucht werden kann. Ist V frei von Singularitäten, so stellt sie sogar eine reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit dar, und es können Methoden der Differentialgeometrie angewendet werden.

Das ist auch das zugrundeliegende Prinzip dieser Arbeit: Wir untersuchen mit topologischen und differentialgeometrischen Mitteln Objekte, die aus der algebraischen Geometrie stammen. Diese Objekte werden hauptsächlich nichtsinguläre projektive algebraische Varietäten über \mathbb{R} sein, die selbst entweder in \mathbb{R} oder in \mathbb{C} liegen. Im ersten Fall sprechen wir von einer *reellen*, im zweiten Fall von einer *komplexen* algebraischen Varietät.

Die einfachsten Varietäten haben Dimension 0. Ihre Punkte exakt zu bestimmen, stellt in der Regel ein durchaus nichttriviales Problem dar, doch aus topologischer Sicht sind sie uninteressant, da sie stets aus einer endlichen Anzahl von diskret liegenden Punkten bestehen. Es ist zudem leicht zu erkennen, daß der Grad eines Polynoms eine obere Schranke für die Anzahl seiner Nullstellen darstellt.

Varietäten der Dimension 1 werden *Kurven* genannt. Die Topologie einer komplexen Kurve läßt sich durch eine einzige Invariante beschreiben, ihr sogenanntes Geschlecht g . Eine komplexe Kurve vom Geschlecht g ist topologisch gesehen eine Kugel mit g 'Henkeln' bzw. ein 'Doughnut mit g Löchern' (zur Erläuterung dieser Begriffe, siehe Kapitel I, Abschnitt 1.2).

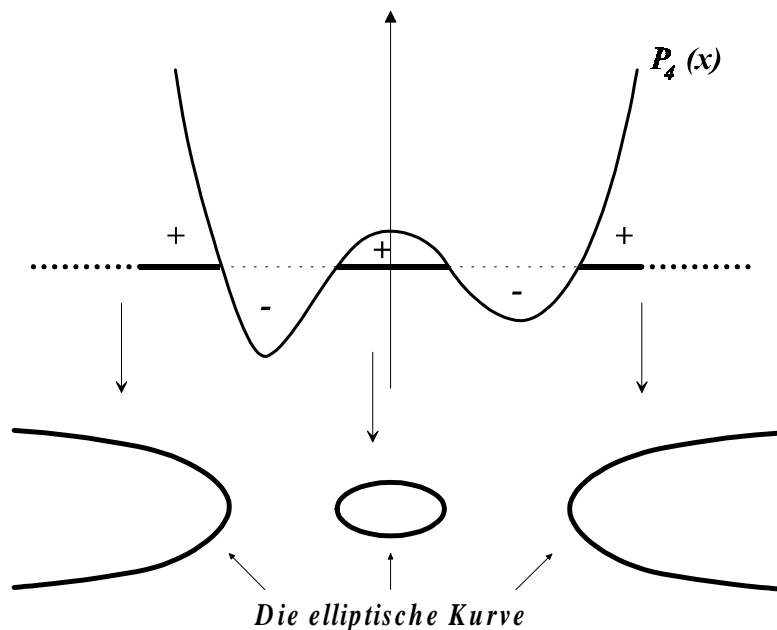
Um reelle Kurven $C_{\mathbb{R}}$, d.h. reelle Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten, zu untersuchen, kann man ebenfalls zunächst einmal die komplexen Nullstellen $C_{\mathbb{C}}$ der

Polynome betrachten. $C_{\mathbb{R}}$ ist dann die Menge der reellen Punkte von $C_{\mathbb{C}}$, der entsprechenden komplexen Kurve (über \mathbb{R}), oder anders ausgedrückt, die Fixpunktmenge von $C_{\mathbb{C}}$ unter komplexer Konjugation. Auf diese Weise erhält man Aussagen über die reellen Kurven mit Hilfe von Eigenschaften der entsprechenden komplexen, wie etwa, daß die Zahl der Zusammenhangskomponenten der reellen Kurve $g + 1$ nicht überschreitet. Diese Schranke wurde 1876 von Harnack gefunden; er zeigte gleichzeitig, daß sie nicht weiter verbessert werden kann.

Eine besondere Rolle spielen nicht-singuläre Kurven vom Geschlecht 1, sie werden elliptische Kurven genannt. Ihre kanonische Klasse ist trivial, d.h. jede rationale Differentialform auf ihnen definiert eine globale rationale Funktion.

Man kann zeigen, daß die elliptischen Kurven über \mathbb{R} genau die sind, deren Gleichung im affinen Raum die Form $y^2 = P_4(x)$ annimmt, wobei $P_4(x)$ ein reelles Polynom vom Grad 4 ohne Mehrfachnullstellen ist. An dieser Gleichung läßt sich leicht erkennen, daß es zu jedem $x \in \mathbb{C}$ genau eine Lösung $y \in \mathbb{C}$ (nämlich $y = 0$) gibt, falls $P_4(x) = 0$, und zwei, falls $P_4(x) \neq 0$. Die komplexen Punkte der elliptischen Kurve sind somit eine doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, der projektiven Geraden, mit Verzweigung in den Punkten $x \in \mathbb{C}$ mit $P_4(x) = 0$. Die reellen Punkte stellen somit eine doppelte Überlagerung von $\overline{X_{P_4}^+} := \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \mid P_4(x) \geq 0\}$ mit Verzweigung in den Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit $P_4(x) = 0$ dar.

Wenn $P_4(x)$ etwa 4 reelle Nullstellen hat, dann erhalten wir folgendermaßen die entsprechende reelle elliptische Kurve:



Da in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ $\infty = -\infty$ gilt, sind die zwei Halbschalen im Unendlichen miteinander verbunden; somit hat die reelle elliptische Kurve zwei kreisförmige Zusammenhangskomponenten: Falls $P_4(x)$ weniger als 4 Nullstellen hat, so reduziert sich auch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Da die komplexen Nullstellen immer in Paaren

auftreten, muß die Anzahl der reellen Nullstellen von $P_4(x)$ gerade sein. Besitzt $P_4(x)$ zwei reelle Nullstellen, so ist, mit einem analogen Bild zu dem obigen, leicht zu sehen, daß die elliptische Kurve dann aus einer kreisförmigen Zusammenhangskomponente besteht. Ist $P_4(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, so ist die entsprechende reelle elliptische Kurve sogar leer.

Im Falle von Flächen (Varietäten der Dimension 2) ist die Situation naturgemäß komplizierter. Es war eine große Errungenschaft der italienischen Geometer zu Beginn des 20. Jahrhunderts, die richtigen Invarianten zu bestimmen. Die entsprechende Einteilung der Flächen in Klassen ist heute unter dem Namen Enriques-Kodaira-Klassifikation bekannt. Die Rolle der elliptischen Kurven im eindimensionalen Fall übernehmen hier die K3-Flächen. Sie sind charakterisiert dadurch, daß sie einfach zusammenhängend sind und ihre kanonische Klasse trivial ist.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit für reelle K3-Flächen $X_{\mathbb{R}}$. Als entscheidend erweist sich wiederum, auch die entsprechende komplexe Fläche $X_{\mathbb{C}}$ über \mathbb{R} zu betrachten; $X_{\mathbb{R}}$ ergibt sich dann als Fixpunktmenge der komplexen Konjugation auf $X_{\mathbb{C}}$, welche hierauf eine antiholomorphe Involution darstellt. Zentrales Resultat ist die Beziehung zwischen den Kohomologiegruppen dieser beiden Flächen:

$$\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_j \left(\dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2 \dim(1 + S)H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right),$$

wobei S die komplexe Konjugation auf $X_{\mathbb{C}}$ bezeichnet, mit Fixpunktmenge $X_{\mathbb{R}}$. Algebraische Flächen, für die eine solche Gleichung gilt, werden Galois-maximal genannt. Für die Eulercharakteristik gilt ein ähnlicher Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \chi(X_{\mathbb{R}}) &= \sum_i (-1)^i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \sum_j (-1)^j \left(-\dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + 2 \dim \text{Fix}_S H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right). \end{aligned}$$

Da die Kohomologiegruppen von $X_{\mathbb{C}}$ bekannt sind, lassen sich die Dimensionen der Kohomologiegruppen von $X_{\mathbb{R}}$ letztendlich abhängig von 2 Parametern b und λ schreiben, die beide nur beschränkte Werte annehmen können (sie hängen ab von der Wirkung von S auf $H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Zusammen mit weiteren Restriktionen in Form von Kongruenzen und Ergebnissen von Kharlamov, die besagen, daß $X_{\mathbb{R}}$ orientierbar ist und maximal eine Zusammenhangskomponente vom Geschlecht > 0 besitzt, kann man so die möglichen topologischen Typen maximal einschränken (siehe Tabelle 3.2, Seite 66). Es bleibt als Aufgabe, diese zu konstruieren.

Es erweist sich, daß analog zum eindimensionalen Fall reelle K3-Flächen als doppelte Überlagerung eines X_f^+ mit Verzweigung in $V(f)$ realisiert werden können, wobei $f(X, Y, Z)$ ein reelles homogenes Polynom vom Grad 6 ist mit Nullstellen $V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ und $\bar{X}_f^+ := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid f(x, y, z) \geq 0\}$. Da die reellen projektiven ebenen Kurven vom Grad 6 durch Resultate von Gudkov aus dem Jahre 1969 (aufbauend auf einer Methode von Hilbert) genau bekannt sind, sind dementsprechend auch die topologischen Typen reeller K3-Flächen genau bekannt.

Dem wäre eigentlich nichts mehr hinzuzufügen, doch die besondere Aufgabenstellung dieser Arbeit lautete, diese Sextiken mit Hilfe einer neuartigen Methode, die von Oleg Viro eingeführt wurde, zu konstruieren. Hintergrund dieser Idee ist, daß die klassische Methode beim Grad 6 an ihre Grenzen stößt (und hier auch schon äußerst kompliziert in der Anwendung ist), während die Methode von Viro auch bei höheren Graden noch gute Dienste leistet. Die Hoffnung ist, daß die Methode auch in einer höheren Dimension, bei der Realisierung reeller Calabi-Yau-Varietäten der Dimension 3 (deren niederdimensionale Vertreter die elliptischen Kurven und die K3-Flächen darstellen) Fortschritte bringen könnte, da in dieser Richtung bislang sehr wenig erreicht worden ist.

Allerdings lassen sich mit der Viro-Methode nicht alle ebenen projektiven Kurven konstruieren, beim Grad 6 war dies der Fall für eine Kurve vom Typ $\langle 1 \text{ II } 1(9) \rangle$ (zur Bezeichnungsweise siehe Kapitel I, Abschnitt 1.24). Dadurch ließ sich die reelle K3-Fläche, die topologisch eine disjunkte Summe von neun Sphären und einer Fläche vom Geschlecht 2 ist, nicht realisieren. Um die fehlende K3-Fläche doch noch realisieren zu können, wurde der Versuch unternommen, diese alternativ als doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ mit Verzweigung entlang einer reellen Kurve vom Bigrad $(4,4)$ zu erhalten. Doch die entsprechende Kurve vom Typ $\langle 1(9) \rangle$ ließ sich ebenfalls nicht konstruieren. Nichtsdestotrotz zeigt dieser zweite Weg sehr schön die Möglichkeiten der Viro-Methode und wird hier daher ebenfalls präsentiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im ersten Kapitel werden zunächst die grundlegenden Begriffe eingeführt, denen man in der algebraischen Geometrie begegnet und die hier Verwendung finden. Es werden differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ihre (Ko-)Tangentialräume definiert und der Begriff der Orientierbarkeit erklärt. Einige wichtige Beispiele wie der projektive Raum und der g -Torus werden angegeben, sowie die bekannte Tatsache, daß letztere schon sämtliche 2-dimensionalen reellen orientierbaren Mannigfaltigkeiten darstellen. Es werden algebraische Varietäten, sowie reguläre und rationale Funktionen, definiert, auf dem Vorangehenden aufbauend Divisoren erklärt und die für K3-Flächen wichtige kanonische Klasse definiert. Schließlich werden reelle ebene Kurven gesondert untersucht und es werden einige klassische Resultate dargestellt.

Im zweiten Kapitel wird die Methode von Viro vorgestellt, mit deren Hilfe algebraische Varietäten zusammengeklebt werden können. Zunächst wird gezeigt, wie sich die allgemeine Form der Methode aus dem asymptotischen Verhalten von Kurven herleiten läßt, dann wird die in der Arbeit verwendete, spezielle Form beschrieben, mit deren Hilfe sich Kurven kombinatorisch erzeugen lassen. Zu diesem Zweck ist es allerdings erforderlich, konvexe Polygone (hier insbesondere: Dreiecke und Rechtecke) regulär zu triangulieren; die hierzu nötigen Definitionen und einfache, allgemeine Ergebnisse werden hierzu gezeigt.

Im dritten Kapitel werden weitere topologische Hilfsmittel zur Untersuchung von Varietäten eingeführt. Die Fundamentalgruppe und Überlagerungen werden definiert, sowie die enge Korrespondenz zwischen ihnen gezeigt. Es folgt eine (sehr kurze) Einführung in die (Ko-)Homologietheorie, die Euler-Zahl eines g -Torus' wird berechnet, sowie die wichtige Poincaré-Dualität beschrieben. Diese Methoden werden zu-

sammen mit einigen weiteren Resultaten auf reelle K3-Flächen angewendet. Mit Hilfe der Tatsache, daß K3-Flächen über \mathbb{R} Galois-maximal sind und ihr Realteil höchstens eine Komponente vom Geschlecht > 0 besitzt, sowie einigen weiteren Restriktionen in Form von Kongruenzen, lassen sich die topologischen Typen reeller K3-Flächen maximal einschränken. Es verbleiben so 66 Typen, die von zwei Parametern abhängen. Schließlich wird dargestellt, wie reelle K3-Flächen als doppelte Überlagerungen von \mathbb{P}^2 bzw. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit Verzweigung entlang einer Kurve vom Grad 6 bzw. Bigrad $(4,4)$ realisiert werden können.

Im vierten Kapitel wird gezeigt, wie reelle K3-Flächen realisiert werden können, indem man reelle Kurven mit der Methode von Viro konstruiert. Es wird gezeigt, daß die Triangulationen, die hierbei Verwendung finden, regulär sind. Die prinzipielle Idee dabei ist, bestehende, grobe reguläre Triangulationen zu verfeinern, so daß die Regularität erhalten bleibt. Die auf diese Weise erzielten Konstruktionen finden sich gesammelt im Anhang.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinem Betreuer Prof. Dr. Victor Batyrev bedanken, der mir sowohl durch vielerlei Ratschläge als auch durch die Begeisterung an der Mathematik, die er vermitteln konnte, über alle aufgetretenen Probleme hinweggeholfen hat.

I Grundlagen

In diesem Kapitel werden differenzierbare Mannigfaltigkeiten und algebraische Varietäten definiert und einige wichtige Beispiele gegeben. Darauf wenden wir uns algebraischen Hyperflächen, also Untervarietäten der Kodimension 1, zu. Diese werden zweckmäßigerweise als Elemente eines \mathbb{Z} -Moduls (Modul der Divisoren) aufgefaßt. Nach den dazugehörigen allgemeineren Betrachtungen schließen wir das Kapitel, indem wir konkret reelle ebene Kurven als Hyperflächen in \mathbb{R}^2 , $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ oder $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ genauer untersuchen.

1.1 Mannigfaltigkeiten

1.1 Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und X ein topologischer Raum, $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ und für alle α $\varphi^{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus von U_{α} in eine offene Menge des \mathbb{R}^n . Ein Paar $(U_{\alpha}, \varphi^{\alpha})$ heißt *Karte*, $\{(U_{\alpha}, \varphi^{\alpha})\} =: \mathcal{A}$ heißt *Atlas* auf X .

Die Abbildungen $\varphi_1^{\alpha}, \dots, \varphi_n^{\alpha}$ werden *lokales Koordinatensystem* auf U_{α} genannt und für $x \in U_{\alpha}$ heißen $(\varphi_1^{\alpha}(x), \dots, \varphi_n^{\alpha}(x))$ *lokale Koordinaten* von x in U_{α} .

X ist eine *reelle n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit*, falls die Koordinatenwechsel auf $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ stets differenzierbar sind, d.h. falls

$$\varphi^{\alpha\beta} := \varphi^{\beta} \circ (\varphi^{\alpha})^{-1} : \varphi^{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \varphi^{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

differenzierbar ist für alle $(U_{\alpha}, \varphi^{\alpha}), (U_{\beta}, \varphi^{\beta}) \in \mathcal{A}$.

Die Mannigfaltigkeit heißt *glatt*, falls die Koordinatenwechsel beliebig oft differenzierbar sind.

In der Analysis werden viele wichtige Begriffe nur lokal definiert, daher lassen sie sich ohne Probleme auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Ein typisches Beispiel hierfür ist:

1.2 Definition: Seien X und Y zwei reelle differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt *differenzierbar*, wenn für alle Karten (U, φ) von X und (V, ψ) von Y die Abbildungen $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar sind.

f heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} differenzierbar sind.

Sei X eine reelle n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, (U, φ) eine Karte auf X . Dadurch ist die differenzierbare Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt. Wir definieren nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} := \varphi \circ \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Anschaulich gesehen wird f lokal als $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ betrachtet, mit den offensichtlichen partiellen Ableitungen.

Ist (V, ψ) eine andere Karte auf X , so ergibt sich auf $U \cap V$ mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}.$$

Bezeichne im folgenden Mannigfaltigkeit stets eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beispiele:

- a) $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ ist eine reelle n -dimensionale Mannigfaltigkeit:

Wähle Karten (U_i, φ^i) , $i = 1, \dots, n$, auf S^n mit

$$U_i := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i > 0\},$$

$$\varphi^i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n).$$

Die φ^i sind offensichtlich Diffeomorphismen, daher sind die Koordinatenwechsel $\varphi^i \circ (\varphi^j)^{-1}$ ebenfalls differenzierbar.

- b) Sei $g \in \mathbb{N}$ und ein $4g$ -Gon in \mathbb{R}^2 gegeben. Wähle nun einen Umlaufsinn des Randes und bezeichne der Reihe nach die Kanten des Polygons mit $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Die Folge $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ wird *Flächenwort* genannt. Identifiziere nun die Kanten a_i mit a_i^{-1} , b_i mit b_i^{-1} , $i = 1, \dots, g$, in gegensätzlicher Richtung (relativ zum gewählten Umlaufsinn).

Es ist leicht ersichtlich, daß dabei eine reelle 2-dimensionale Mannigfaltigkeit entsteht, welche g -Torus T_g genannt wird. T_g ist die Oberfläche eines 'Doughnuts mit g Löchern' (siehe Bild 1.2). In diesem Sinne setze $T_0 := S^2$.

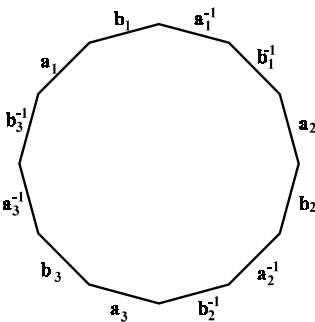


Bild 1.1: T_3 in der Darstellung als Dodekagon

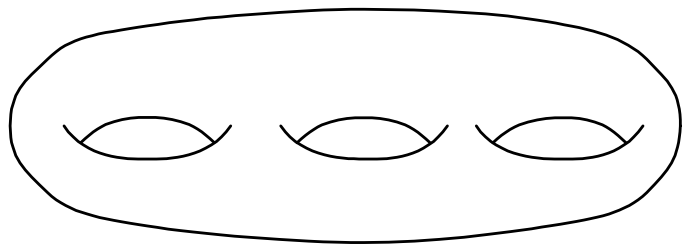


Bild 1.2: T_3

- c) Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$:
Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sei folgende Äquivalenzrelation definiert: $(x_0, \dots, x_n) \sim$

(y_0, \dots, y_n) , falls ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $y_i = \lambda x_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ bezeichnet, und die Äquivalenzklassen selber als Punkte in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Für einen Punkt $[(x_0, \dots, x_n)]$ schreibt man $(x_0 : \dots : x_n)$ und nennt dies *homogene Koordinaten* des Punktes. Durch die Quotiententopologie wird $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ zu einem topologischen Raum. Auf $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ werden für $i = 1, \dots, n$ Karten (A_i, φ_i) definiert:

$$A_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid x_i \neq 0\}$$

(A_i ist wohldefiniert),

$$\varphi^i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_0 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Die lokalen Koordinaten $(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ auf A_i heißen auch *affine Koordinaten* des Punktes $(x_0 : \dots : x_n)$.

Behauptung: A_i ist offen in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ und φ^i ist ein Homöomorphismus für alle i .

Beweis der Behauptung: Sei OBdA $i = 0$ und $\varphi := \varphi^0$. φ ist bijektiv, da durch

$$\varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

offensichtlich die Umkehrabbildung definiert ist.

Mit der Projektionsabbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ und der Inklusion $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$ läßt sich φ^{-1} schreiben als $\varphi^{-1} = \pi \circ \iota$ und ist somit stetig. Sei andererseits $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ist

$$\pi^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = \bigcup_{\lambda \neq 0} (\{\lambda\} \times \lambda U) = F(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times U),$$

wo $F(\lambda, (x_1, \dots, x_n)) := (\lambda, (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n))$. F ist offensichtlich ein Homöomorphismus von $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$, , daher ist mit $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times U$ auch $\pi^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ sowie nach Definition $\varphi^{-1}(U)$ offen für alle offenen $U \subset \mathbb{R}^n$ und somit φ stetig.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\varphi^i \circ \varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{1}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

differenzierbar auf $\varphi(A_0 \cap A_i)$, da dort $x_i \neq 0$ gilt. $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ist somit eine reelle n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.3 Proposition: $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ist diffeomorph zur Kugel S^n , bei der man die jeweils gegenüberliegenden Punkte identifiziert.

Beweis: Die Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$ ist eingeschränkt auf eine Karte U_i von S^n (definiert wie oben) offensichtlich ein Diffeomorphismus von

U_i nach A_i . Es gilt $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$. Sei \sim die Äquivalenzrelation auf S^n mit $x \sim y$, falls $x = y$ oder $x = -y$. Dadurch wird $f : S^n/\sim \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ bijektiv und somit ein Diffeomorphismus. \square

Ganz analog zur reellen Mannigfaltigkeit läßt sich die *komplexe n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit* definieren, die lokal aussieht wie der \mathbb{C}^n und deren Koordinatenwechsel komplex differenzierbar sind. Eine n-dimensionale komplexe ist offensichtlich eine 2n-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit.

Ein wichtiges Beispiel hierfür ist der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, der wie im reellen Fall aus $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ entsteht, indem die Punkte, die komplexe Vielfache voneinander sind, identifiziert werden.

Falls der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} feststeht, so schreiben wir für den betreffenden projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ nur \mathbb{P}^n .

Sei X eine reelle n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Sind x_1, \dots, x_n lokale Koordinaten in einer Umgebung von x , so spannen die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ einen n-dimensionalen reellen Vektorraum $T_x X$ auf, der *Tangentenraum* von X an x genannt wird. Bei der Wahl eines anderen Koordinatensystems y_1, \dots, y_n findet nach der Kettenregel ein Basiswechsel in $T_x X$ zu $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ statt mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Jede differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ induziert nun eine lineare Abbildung

$$df : T_x X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

der Raum dieser linearen Abbildungen ist der Dualraum von $T_x X$ und wird mit $T_x^* X$ bezeichnet. Ist $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ Basis von $T_x X$, dann ist dx_1, \dots, dx_n die duale Basis von $T_x^* X$. Ein Koordinatenwechsel zu y_1, \dots, y_n induziert ebenfalls einen Basiswechsel in $T_x^* X$ zu dy_1, \dots, dy_n mit

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j.$$

Jede differenzierbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ mit $\varphi(x) = y$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ($\dim Y = m$) induziert die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_x X &\rightarrow T_y Y & \varphi^* : T_y^* Y &\rightarrow T_x^* X \\ \frac{\partial}{\partial x_i} &\mapsto \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} & dy_j &\mapsto d\varphi_j \end{aligned}$$

Für eine genaue Darstellung dieser Begriffe sei auf die entsprechende Literatur verwiesen, etwa [DFN II].

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit den kartesischen Koordinaten x und y . In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ lassen sich sphärische Koordinaten r und φ definieren mit

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi & y &= r \cos \varphi \\ \text{bzw. } \varphi &= \arctan \frac{y}{x} & r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Es folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{y}{y^2 + x^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= -\frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r}. \\ dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial r} dr = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial r} dr = -r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr. \end{aligned}$$

Sei nun für jedes $x \in X$ $\omega(x) \in T_x^*X$. Dann läßt sich ω lokal in einer Umgebung U von x schreiben als

$$\omega = \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

für beliebige Funktionen $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Gesamtheit solcher $\omega(x)$ bezeichnen wir mit $\Phi[X]$.

Auf $\Phi[X]$ betrachten wir das äußere Produkt $\Phi^r[X] = \bigwedge^r \Phi[X]$ ($r \geq 0$). Es besteht aus Elementen ω , die sich lokal in der Form

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} g_{i_1 \dots i_r}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

schreiben lassen. Bei einem Wechsel des Koordinatensystems erfolgt, induziert durch den Basiswechsel in T_x^*X , eine Änderung dieser Darstellung. In dieser Arbeit ist nur der Fall $r = n$ von Belang, in diesem Fall ergibt sich

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = J \left(\begin{array}{c} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{array} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

$$\text{mit } J \left(\begin{array}{c} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{array} \right).$$

Die Räume $\Phi^r[X]$ sind allerdings zu groß, um interessante Ergebnisse zu liefern. Daher schränkt man die erlaubten Funktionen $g_{i_1 \dots i_r}$ in der lokalen Darstellung ein. Sind diese regulär¹, dann spricht man von *regulären r -dimensionalen Differentialformen*, sind sie rational oder nur holomorph, spricht man von *rationalen* bzw. *holomorphen Differentialformen*. Die regulären r -dimensionalen Differentialformen schreiben wir $\Omega^r[X]$, die rationalen $\Omega^r(X)$.

Von großer Bedeutung ist, daß man über r -dimensionale Differentialformen integrieren kann (auf r -dimensionalen Teilflächen von X), zunächst lokal wie im \mathbb{R}^r , aber auch global. Wir werden dies hier allerdings nicht verwenden. Für genauere Beschreibungen sei wiederum auf die Literatur verwiesen.

1.4 Definition: Sei x ein Punkt in einer reellen n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und seien τ_1, τ_2 zwei Basen des Tangentialraums $T_x X$. Dann gibt es eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix A mit $\tau_2 = A\tau_1$. Man sagt, τ_1 und τ_2 haben dieselbe *Orientierung*, wenn $\det A > 0$. Die Menge der Basen von $T_x X$ mit derselben Orientierung heißt *Orientierungsklasse*. Eine reelle n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn man zu jedem Punkt eine eindeutige Orientierungsklasse wählen kann, die stetig von den Punkten abhängt.

Auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit lassen sich somit 'Richtungen' wie 'rechts', 'links', 'oben', 'unten' usw. definieren. Auf einer nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit kann es dagegen passieren, daß man ein wenig 'herumläuft' und bei der Rückkehr an den Ausgangspunkt 'rechts' und 'links' vertauscht sind, während die anderen Richtungen fest geblieben sind.

Beispiele: (siehe [DFN II])

- a) Jede 1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist orientierbar.
- b) \mathbb{P}^n ist orientierbar, genau dann, wenn n ungerade ist.
- c) Jede komplexe differenzierbare Mannigfaltigkeit ist orientierbar.

1.5 Satz: (Klassifikationssatz) Sei X eine kompakte zusammenhängende reelle orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- (i) X hat Dimension 1:
 X ist diffeomorph zum Kreis S^1 .
- (ii) X hat Dimension 2:
 X ist diffeomorph zu einem g -Torus T_g , $g \geq 0$.

Beweis: Siehe etwa [DFN III]. □

¹falls X eine nichtsinguläre algebraische Varietät ist (siehe den nächsten Abschnitt).

1.2 Algebraische Varietäten

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten stellen eine Methode dar, um die Werkzeuge der Analysis auch auf 'krummen Gebilden' anzuwenden. Wie gesehen, kann man auf ihnen differenzieren, man kann integrieren, Differentialgleichungen lösen etc. . Dies alles wird dadurch ermöglicht, daß, zumindest lokal, die euklidische Topologie gegeben ist. Wir nennen diesen Ansatz für die folgende Betrachtung *analytisch*.

In der algebraischen Geometrie ist man ebenfalls an 'krummen Gebilden' interessiert; doch ist man bestrebt, alle Begriffe letztendlich auf Polynome zurückzuführen. Fragestellungen werden somit mit Methoden der Algebra und nicht analytisch gelöst. Die analytischen Konzepte werden durch algebraische Konzepte ersetzt: Statt der Mannigfaltigkeit führt man algebraische Varietäten ein, statt der euklidischen die Zariski-Topologie; es gibt einen eigenen Dimensionsbegriff, etc. .

Natürlich sind die Konzepte nicht völlig voneinander unabhängig, und die beiden Gebiete beeinflussen sich gegenseitig fruchtbar. Jede algebraische Varietät ohne Singularitäten ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn man auf ihr die euklidische Topologie heranzieht. Dementsprechend stimmen die analogen Begriffe auf gemeinsamen Objekten überein: Eine n -dimensionale Varietät wird zu einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit, eine komplette Varietät zu einer kompakten Mannigfaltigkeit u.v.m. .

In dieser Arbeit wird hauptsächlich der analytisch-topologische Aspekt algebraischer Varietäten betrachtet, daher wird im folgenden auf eine umfassende Darstellung der Grundlagen der algebraischen Geometrie verzichtet; es folgt lediglich eine Erläuterung der für die vorliegende Arbeit wichtigen Grundbegriffe, sofern sie über das bisher Dargestellte hinaus gehen.

Seien im folgenden $\mathbb{K}, \mathbb{K}' = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$.

1.6 Definition: Seien $d, n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$ eine endliche Menge von Polynomen. Die Menge

$$V(f_1, \dots, f_n) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}'^d \mid f_1(x_1, \dots, x_d) = \dots = f_n(x_1, \dots, x_d) = 0\}$$

heißt *reelle* oder *komplexe affine algebraische Varietät über \mathbb{K}* (reell, falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$, komplex, falls $\mathbb{K}' = \mathbb{C}$).

Falls $n = 1$, heißt $V(f)$ *Hyperfläche* von \mathbb{K}'^d .

Bemerkung: Wir unterscheiden also zwischen dem Körper, in dem die Koeffizienten der Polynome definiert sind, und dem Körper, in dem die Nullstellen betrachtet werden. Dieselbe Unterscheidungsweise soll auch für die folgenden Definitionen gelten.

1.7 Definition: Ein Polynom $f(X_1, \dots, X_d)$ heiße *homogen* vom Grad m , wenn jedes Monom von f Grad m hat.

1.8 Definition: Seien $d, n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_d]$ eine endliche Menge von homogenen Polynomen. Die Menge

$$\{(x_0 : \dots : x_d) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}'}^d \mid f_i(x_0, \dots, x_d) = 0 \forall i = 1, \dots, n\} =: V(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}'}^d$$

ist wohldefiniert und heißt reelle bzw. komplexe *projektive* algebraische Varietät über \mathbb{K} .

Falls $n = 1$, heißt $V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$ *Hyperfläche* von $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$.

Von großer Bedeutung in dieser Arbeit werden komplexe algebraische Varietäten über \mathbb{R} sein. Diese lassen sich besser erkennen, indem man die bisherige Sichtweise umkehrt:

1.9 Proposition: Eine komplexe projektive algebraische Varietät V ist genau dann eine (komplexe projektive algebraische) Varietät über \mathbb{R} , wenn die komplexe Konjugation eine Involution auf V darstellt.

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Sei nun $V = V(f_1, \dots, f_n)$ und $V = S(V)$.² Es gilt dann für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, daß $V(\overline{f_j}) \subset V$ liegt. Somit ist leicht zu sehen, daß $V(f_1 + \overline{f_1}, i(f_1 - \overline{f_1}), \dots, f_n + \overline{f_n}, i(f_n - \overline{f_n})) = V$, andererseits sind $f_j + \overline{f_j}$ und $i(f_j - \overline{f_j})$ reelle Polynome. \square

1.10 Definition: Sei $V = V(f_1, \dots, f_n)$ eine algebraische Varietät. Ein Punkt $x \in V$ heißt *Singularität*, falls die partiellen Ableitungen aller Polynome f_1, \dots, f_n an diesem Punkt verschwinden.

1.11 Proposition: Eine reelle (komplexe) algebraische Varietät ohne Singularitäten ist eine glatte reelle (komplexe) Mannigfaltigkeit.

Beweis: Dies ist eine Folge des Impliziten Funktionensatzes. \square

1.12 Definition: Eine reelle (komplexe) projektive algebraische Varietät ohne Singularitäten nennen wir *reelle (komplexe) Fläche*, wenn sie eine 2-dimensionale reelle (komplexe) Mannigfaltigkeit ist.

Beispiel: $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ ist eine Fläche; reell, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, komplex, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (die Beweise sind identisch):

Sei $x \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Wir schreiben $x = (u_0 : u_1; v_0 : v_1)$ und nennen dies *bihomogene Koordinaten* von x , da sie homogen in der ersten und homogen in der zweiten Komponente sind. Setze nun

$$x_0 = u_0 v_0, \quad x_1 = u_1 v_1, \quad x_2 = u_0 v_1, \quad x_3 = u_1 v_0.$$

Diese Abbildung ist als Abbildung $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ wohldefiniert und injektiv, sie wird *Segre-Abbildung* genannt. Es ist leicht zu sehen, daß ihr Bild genau die Punkte in \mathbb{P}^3 sind, die die Gleichung

$$x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$$

erfüllen. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ kann somit als nichtsinguläre projektive algebraische Varietät realisiert werden.

²Um Verwechslungen mit dem Abschluß zu vermeiden, werden wir für Varietäten die Bezeichnung S für die komplexe Konjugation bevorzugen.

Auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ definieren wir Karten (A_{ij}, φ^{ij}) , $i, j \in \{0, 1\}$, durch

$$A_{ij} := \{(u_0 : u_1; v_0 : v_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid u_i, v_j \neq 0\},$$

$$\varphi^{ij}(u_0 : u_1; v_0 : v_1) = \left(\frac{u_{1-i}}{u_i}, \frac{v_{1-j}}{v_j}\right).$$

Die φ^{ij} bilden einen Diffeomorphismus von A_{ij} nach \mathbb{R}^2 . Andererseits bedecken A_{00} , A_{10} , A_{01} und A_{11} den Raum $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und bilden somit einen Atlas.

Auf einer algebraischen Varietät X ist man weiterhin an 'polynomialen' Abbildungen interessiert. Ist X eine projektive Varietät in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$, so nennt man $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ *rational*, falls $f = \frac{p}{q}$, mit homogenen Polynomfunktionen $p, q \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_d]$ vom selben Grad und $q \not\equiv 0$ auf X . Ist $q(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so heißt f *regulär*. Für affine Varietäten gilt dieselbe Definition, indem man sie als offene Menge im projektiven Raum ansieht.

Die Menge der regulären Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[X]$, die der rationalen Funktionen mit $\mathbb{K}(X)$.

1.3 Divisoren

Sei X eine n -dimensionale algebraische Varietät (affin oder projektiv) ohne Singularitäten. Ein *Divisor* ist eine endliche Linearkombination

$$\sum_i n_i C_i,$$

wo $n_i \in \mathbb{Z}$ und C_i irreduzible³ Untervarietäten der Kodimension 1 (d.h. Dimension $n - 1$) sind. Die Menge der Divisoren auf X bildet somit einen freien \mathbb{Z} -Modul und wird mit $\text{Div}(X)$ bezeichnet.

Zu jeder regulären Funktion $f \in \mathbb{K}[X]$ ist $V(f)$ eine Untervarietät der Kodimension 1 und damit Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten V_i . Zählt man diese mit der entsprechenden Multiplizität n_i ,⁴ so erhält man den Divisor

$$(f) := \sum_i n_i V_i.$$

Für eine rationale Funktion $f = \frac{g}{h} \in \mathbb{K}(X)$ definiert man $(f) = (g) - (h)$.

Ein Divisor der Form $D = (f)$ ($f \in \mathbb{K}(X)$) heißt *Hauptdivisor*. Die Hauptdivisoren bilden einen Untermodul $P(X)$; der Quotient $\text{Div}(X)/P(X)$ bildet eine Gruppe, deren Elemente *Divisorenklassen* heißen.

Beispiele:

- a) Falls $X = \mathbb{K}^n$, so ist $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)$ der Quotientenkörper der Polynome. Jede irreduzible Untervarietät der Kodimension 1 wird als Nullstellenmenge eines Polynoms erzeugt, somit ist $\text{Div}(X)/P(X) = 0$.

³Das heißt, es gibt keine nichttriviale Darstellung $C_i = C'_i \cup C''_i$ mit Untervarietäten C'_i und C''_i .

⁴Es bleibt zu definieren, was das genau bedeutet \rightarrow [ShaBas].

- b) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$: Falls $f \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, dann ist $f = \frac{g}{h}$, wobei g, h homogene Polynome sind mit $\deg g = \deg h$. Ist $g = g_1^{k_1} \dots g_s^{k_s}$, $h = h_1^{l_1} \dots h_t^{l_t}$ die Zerlegung von g und h in irreduzible Faktoren, dann ist

$$(f) = \sum_i k_i V(g_i) - \sum_j l_j V(h_j)$$

und $\deg(f) := \sum_i k_i \deg g_i - \sum_j l_j \deg h_j = 0$.

Ist andererseits für einen Divisor $D = \sum_i n_i C_i$ der Grad $\deg D = \sum_i n_i \deg C_i = 0$, so ist $D = (f)$, für $f = \prod g_i^{n_i}$, $C_i = V(g_i)$.

Die Abbildung $D \mapsto \deg D$ stellt somit einen Isomorphismus $\text{Div}(X)/\text{P}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dar.

1.13 Definition: Sei ω eine rationale n -dimensionale Differentialform auf X , dann bestimmen die Nullstellen und Pole von ω einen Divisor auf X , der (ω) geschrieben wird. Für $f \in \mathbb{K}(X)$ gilt offensichtlich $(f\omega) = (f) + (\omega)$. Andererseits ist $\Omega^n(X)$ eindimensional über $\mathbb{K}(X)$, d.h. $\Omega^n(X) = \{f\omega_1 \mid f \in \mathbb{K}(X)\}$ für eine Differentialform $\omega_1 \in \Omega^n(X)$. Die Divisorenklasse eines $\omega \in \Omega^n(X)$ ist somit unabhängig von der Wahl von ω , diese Klasse wird die *kanonische Klasse* von X genannt und mit K_X bezeichnet.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{P}^n$. Seien ferner auf der affinen Menge A_0 mit $x_0 \neq 0$ die affinen Koordinaten $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ gegeben. Durch

$$\omega = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

ist eine n -dimensionale Differentialform gegeben. Offensichtlich hat ω keine Null- oder Polstellen in A_0 .

Wir betrachten nun ω auf der Hyperebene $\{x_0 = 0\} =: H$. Seien $z_1 = \frac{x_0}{x_1}$, $z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, z_n = \frac{x_n}{x_1}$ affine Koordinaten auf $A_1 = \{x_1 \neq 0\}$. $H \cap A_1$ wird dann bestimmt durch $z_1 = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1^{-1}, z_2 = \frac{y_2}{y_1}, \dots, z_n = \frac{y_n}{y_1}, \\ y_1 &= z_1^{-1}, y_2 = \frac{z_2}{z_1}, \dots, y_n = \frac{z_n}{z_1} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \omega &= dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = J \begin{pmatrix} y_1, \dots, y_n \\ z_1, \dots, z_n \end{pmatrix} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= -\left(\frac{1}{z_1}\right)^{n+1} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \end{aligned}$$

d.h. ω hat einen Pol $(n+1)$ -ter Ordnung auf A_1 entlang H . Dies gilt analog auch für A_2, \dots, A_n , somit ist $K_{\mathbb{P}^n} = [-(n+1)H]$.

1.4 Kurven

Wir kehren noch einmal zurück zur Betrachtung des reellen projektiven Raumes \mathbb{P}^n (im folgenden sei mit \mathbb{P}^n immer $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ gemeint). Wir bemerken, daß die hierauf definierten affinen Karten $A_i \cong \mathbb{R}^n$ dicht in \mathbb{P}^n liegen. Man nennt daher \mathbb{P}^n eine Vervollständigung oder Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n . Das, was A_i zum \mathbb{P}^n fehlt, ist eine *projektive Hyperebene* der Form $\{x_i = 0\}$. Diese Hyperebene kann man sich als *Punkte im Unendlichen* vorstellen, wobei gegenüberliegende Unendlichkeitspunkte identifiziert werden. Zudem laufen zwei Geraden genau dann auf denselben Unendlichkeitspunkt zu, wenn sie parallel sind.

Ein Raum, der diese Eigenschaften besitzt, ist aus der täglichen Erfahrung wohlbekannt; er entsteht z.B., wenn der dreidimensionale Raum in das Auge projiziert wird (daher der Name 'projektiver Raum'): Zwei in Wirklichkeit parallele Bahngleise scheinen sich dann am Horizont zu vereinigen. Dieser perspektivische Effekt wurde zuerst von den Malern der Renaissance systematisch erforscht, allerdings dachten diese dabei nicht an einen mathematischen Raum, sondern waren hauptsächlich an wirklichkeitstreuen Abbildungen interessiert.

Das Bemühen, die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten präzise zu formulieren, fand dabei zusehends das Interesse der Mathematiker. Insbesondere Girard Desargues (1591-1661) propagierte stark die Verwendung von Unendlichkeitspunkten (er nennt solche Punkte 'but' (Ziel)). Allerdings hatten seine Zeitgenossen noch Schwierigkeiten, diese Unendlichkeitspunkte als etwas real Existierendes anzusehen. So schreibt René Descartes (1596-1650), der selber durch seine Idee, Geometrie durch algebraische Gleichungen zu beschreiben, zum 'Vater' der modernen Geometrie wurde, in einem Brief an Desargues, daß er dessen Ideen zur projektiven Geometrie zwar für sehr geistreich halte, daß diese aber nur als Hilfsmittel zum besseren Verständnis schwieriger Zusammenhänge angesehen werden dürfe.

Als Vorreiter für die Anwendung des projektiven Raums in der algebraischen Geometrie fungierte vermutlich Newton: Zeit seines Lebens beschäftigte er sich immer wieder mit der Untersuchung von Kurven dritten Grades in der Ebene. Durch sein Gesamtwerk ziehen sich verschiedene Versuche, sogenannte 'Kurven zweiter Art' (nach unseren Bezeichnungen: Kubiken), in Klassen einzuteilen. In seiner Schlussfassung findet er dabei 72 verschiedene Typen von Kubiken (und übersieht dabei 6). Überraschend fügt er allerdings folgende Beobachtung hinzu [The Mathematical Work of Isaac Newton, Bd. VII, S. 634]:

Wenn auf eine unendliche Ebene, die von einer punktförmigen Lichtquelle erhellt wird, Schatten von Figuren geworfen werden sollten, werden die Schatten von Kegelschnitten immer Kegelschnitte sein, diese von Kurven zweiter Art werden Kurven zweiter Art, diese von Kurven dritter Art werden Kurven dritter Art sein und so weiter ohne Ende. Und so wie ein Kreis durch Schattenwerfen alle Kegelschnitte erzeugt, so erzeugen die fünf divergierenden Parabeln mit ihren Schatten alle anderen Kurven der zweiten Art und stellen sie dar, und genauso kann man gewisse einfacherere Kurven der anderen Arten finden, die alle anderen Kurven derselben Art beschreiben, dadurch, daß ihre Schatten von einer punktförmigen Lichtquelle auf eine Ebene

geworfen werden.

Die Betrachtung der 'Schatten' einer Kurve entspricht genau der Betrachtung der Kurve im projektiven Raum \mathbb{P}^2 . Die 'fünf divergierenden Parabeln', von denen Newton spricht, sind genau die fünf verschiedenen Typen von reellen projektiven Kubiken, drei singuläre und zwei nichtsinguläre (in der nachfolgend eingeführten Bezeichnungsweise sind letztere $\langle J \rangle$ und $\langle J \text{ II } 1 \rangle$).

An diesem Beispiel wird deutlich, daß viele Objekte einfacher werden oder sich eleganter beschreiben lassen, wenn man sie im projektiven Raum betrachtet.

1.14 Definition: Sei $f(X, Y)$ ein reelles Polynom.

$$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

heißt *ebene reelle algebraische Kurve*. Zur besseren Unterscheidbarkeit von anderen Kurven schreiben wir im Zweifelsfall $V(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Sei $f(X, Y, Z)$ ein homogenes reelles Polynom. Seine Nullstellen in \mathbb{P}^2 nennen wir *ebene projektive reelle algebraische Kurve* und schreiben dafür $V(f) \subset \mathbb{P}^2$.

Bezeichnung: Da alle in dieser Arbeit auftretenden Kurven algebraisch und eben sind, lassen wir nachfolgend diese Bezeichnungen weg.

1.15 Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(X, Y)$ ein reelles Polynom vom Grad m . Dann heißt

$$f^h(X, Y, Z) := Z^m f\left(\frac{X}{Z}, \dots, \frac{Y}{Z}\right)$$

Homogenisierung von f . Offensichtlich ist f^h homogen und es gilt $f(X, Y) = f^h(X, Y, 1)$.

$$V(f^h) \subset \mathbb{P}^2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid f^h(x : y : z) = 0\}$$

heißt der *Abschluß* von $V(f)$ in \mathbb{P}^2 .

Bemerkung: $V(f^h) \subset \mathbb{P}^2$ ist zunächst einmal zu unterscheiden von $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$, dem topologischen Abschluß von $V(f)$ in \mathbb{P}^2 , wobei $V(f)$ als Teilmenge des \mathbb{R}^2 in \mathbb{P}^2 eingebettet ist. Es ist leicht zu sehen, daß stets $\overline{V(f)} \subset V(f^h)$.

Die Umkehrung gilt dagegen im allgemeinen nicht:

Sei $f(X, Y) = X^2 + Y^4 + 1 \Rightarrow V(f) = \emptyset$, also auch $\overline{V(f)} = \emptyset$. Jedoch $f^h(X, Y, Z) = Z^2 X^2 + Y^4 + Z^4 \Rightarrow (1 : 0 : 0) \in V(f^h)$.

Letzten Endes ist das Ziel allerdings, Informationen über $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ zu erhalten. Wie in der nächsten Proposition gezeigt wird, ist es dafür ohne Belang, ob $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$ oder $V(f^h) \subset \mathbb{P}^2$ betrachtet wird. Darum wird im folgenden stets $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$ geschrieben, wenn die Unterscheidung nicht wichtig ist, bzw. nur $\overline{V(f)}$ statt $V(f) \subset \mathbb{P}^2$, wenn klar ist, in welcher Menge sich $\overline{V(f)}$ befindet.

1.16 Proposition: $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ ist kanonisch homöomorph zu $V(f^h) \cap A_0 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0 \text{ und } f^h(x, y, z) = 0\}$.

Beweis: Sei

$$\varphi : A_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x : y : z) \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

der kanonische Homöomorphismus von A_0 nach \mathbb{R}^2 . Zeige $\varphi(V(f^h) \cap A_0) = V(f)$.

Sei $(x : y : z) \in V(f^h) \cap A_0$, also $z \neq 0$ und $f^h(x, y, z) = 0$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \implies f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \\ \implies \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= \varphi(x : y : z) \in V(f). \end{aligned}$$

Sei andererseits $(x, y) \in V(f)$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) = f^h(x, y, 1) \\ \implies (x : y : 1) &= \varphi^{-1}(x, y) \in V(f^h) \cap A_0. \end{aligned}$$

□

Aus der Kenntnis der projektiven Kurven lassen sich also durch die Wahl von affinen Koordinaten sämtliche Informationen über die nichtprojektiven Kurven zurückgewinnen. Das Ziel ist es also zunächst, das Aussehen der projektiven Kurven zu bestimmen. Dabei stellt sich die Frage, wann zwei Kurven 'gleich' aussehen und wann sie als verschieden anzusehen sind. Zu diesem Zweck wird der Begriff der Isotopie eingeführt.

1.17 Definition: Seien X, Y zwei topologische Räume, $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. f_1 und f_2 heißen *homotop*, falls eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ existiert mit $h(0, \cdot) = f_1$ und $h(1, \cdot) = f_2$ (h heißt *Homotopie*). Man schreibt dann $f_1 \sim f_2$.

1.18 Definition: Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ gibt, so daß $f \circ g \sim \text{id}_Y$ und $g \circ f \sim \text{id}_X$.

Bemerkung: Wenn X und Y homöomorph sind, dann sind sie auch homotopieäquivalent ($\varphi : X \rightarrow Y$ Homöomorphismus $\implies f = \varphi$ und $g = \varphi^{-1}$).

1.19 Definition: Sei M ein topologischer Raum und X, Y zwei Unterräume. X und Y heißen *isotop*, falls eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times X \rightarrow M$ existiert mit $h(0, \cdot) = \text{id}_X$ und $h(1, \cdot) = \text{id}_Y$ (h heißt *Isotopie*).

Bemerkung: X und Y sind also isotop, falls X durch stetige Verformungen innerhalb von M zu Y umgeformt werden kann.

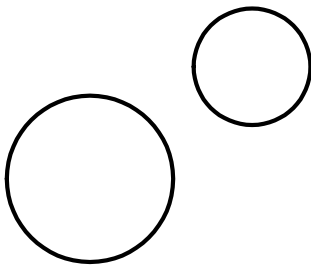
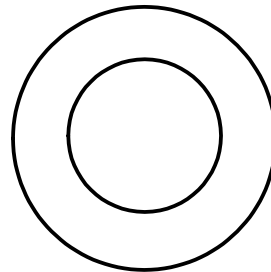
Beispiel: Seien

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= (X^2 + Y^2 - 2) \left((X - 5)^2 + (Y - 5)^2 - 1 \right) \quad \text{und} \\ g(X, Y) &= (X^2 + Y^2 - 2) (X^2 + Y^2 - 1). \end{aligned}$$

$V(f)$ sowie $V(g)$ bestehen aus zwei isolierten Kreisen, sind also als topologische Räume homöomorph und damit auch homotopieäquivalent. Allerdings gibt es keine Isotopie in \mathbb{R}^2 zwischen $V(f)$ und $V(g)$, da es keine Möglichkeit gibt, den inneren Kreis nach außen zu transportieren, ohne daß er dabei den äußeren Kreis schneidet (siehe die Abbildungen 1.3 und 1.4).

Bettet man \mathbb{R}^2 allerdings in \mathbb{R}^3 ein, so sind die Kurven plötzlich isotop, da die Kreise untereinander durchgeschoben werden können.

Die Frage, ob zwei Räume isotop sind, hängt also in starkem Maße von dem sie umgebenden Raum ab.

Bild 1.3: $V(f)$ Bild 1.4: $V(g)$

1.20 Proposition: Sei $f(X, Y, Z)$ ein reelles homogenes nichtsinguläres Polynom (d.h. falls $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = 0 \implies f(x, y, z) \neq 0$). Dann ist jede Zusammenhangskomponente von $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ homöomorph zu einem Kreis und $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ besteht aus endlich vielen davon.

Beweis: $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ ist eine glatte kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}^2 und hat endlich viele Komponenten. Nach dem Klassifikationssatz 1.5 sind diese Komponenten sogar diffeomorph zu Kreisen. \square

1.21 Satz: (Harnack, 1876) Sei $f(X, Y, Z)$ ein reelles homogenes nichtsinguläres Polynom vom Grad m . Dann ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ beschränkt durch $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$. Eine Kurve mit $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ Komponenten heißt M -Kurve. Zu jedem vorgegebenen $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es eine M -Kurve.

Beweis: Siehe [Har]. \square

1.22 Definition: Der Einfachheit halber nennen wir Mengen, die homöomorph zu einem Kreis sind, ebenfalls Kreis. Sei also K ein Kreis in einem Raum X . K heißt *einseitig*, wenn $X \setminus K$ aus nur einer Zusammenhangskomponente besteht, und *zweiseitig*, wenn $X \setminus K$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Falls K zweiseitig ist, dann ist eine der beiden Zusammenhangskomponenten homöomorph zu einer Scheibe und wird *Inneres* von K genannt.

1.23 Proposition: Sei $f(X, Y, Z)$ ein homogenes Polynom. Wenn $\deg f$ ungerade, so gibt es genau einen einseitigen Kreis in $V(f) \subset \mathbb{P}^2$, wenn $\deg f$ gerade, so sind alle Kreise in $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ zweiseitig.

Beweis: Dies folgt aus dem Satz von Bézout, siehe etwa [ViCTop], Satz 1.3.A und Korollar 1.3.B. \square

1.24 Bemerkung und Definition: Das Aussehen einer Kurve in \mathbb{P}^2 läßt sich also bis auf Isotopie durch Anzahl, Art und Lage der Kreise, aus denen sie besteht, beschreiben. Eine solche Beschreibung wird *Schema* der Kurve genannt. Aus dem Vorangegangenen wird klar, daß die folgende Bezeichnungsweise eine ausreichende und vollständige Methode zur Beschreibung der Isotopietypen der projektiven Kurven darstellt:

Die leere Kurve werde durch $\langle 0 \rangle$, der zweiseitige Kreis durch $\langle 1 \rangle$ und der einseitige Kreis durch $\langle J \rangle$ beschrieben. Wenn $\langle A \rangle$ ein Schema ist, dann beschreibt $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$ die Menge, die entsteht, wenn die Kreise in $\langle A \rangle$ von einem weiteren zweiseitigen Kreis umschlossen werden. Falls $\langle A \rangle$ und $\langle B \rangle$ zwei Schemas sind, so daß kein Kreis von $\langle A \rangle$ einen Kreis von $\langle B \rangle$ umschließt und umgekehrt, dann wird die Vereinigung der beiden Mengen durch $\langle A \amalg B \rangle$ beschrieben. Weiterhin soll $\langle 1 \amalg \dots \amalg 1 \rangle$ (n -fache Wiederholung) durch $\langle n \rangle$ abgekürzt werden.

Beispiele: Siehe die Abbildungen 1.7 und 1.8, sowie die Konstruktionen im Anhang.

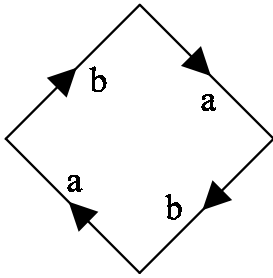
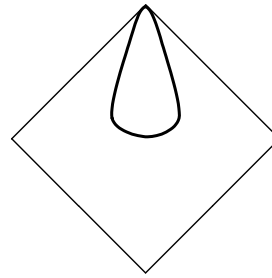
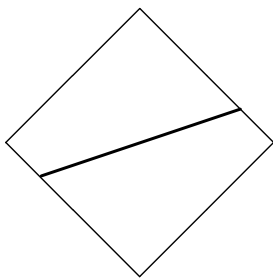
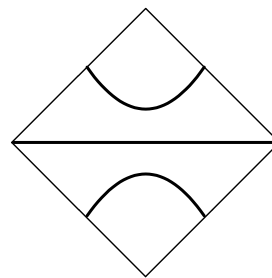
Um Kurven in \mathbb{P}^2 zeichnerisch darzustellen, ist die folgende Proposition sehr nützlich:

1.25 Proposition: \mathbb{P}^2 ist homöomorph zu einem Quadrat, dessen gegenüberliegenden Seiten in umgekehrter Richtung miteinander verklebt (identifiziert) werden. Die Identifikation entspricht somit dem Flächenwort $abab$. (siehe die Skizze 1.5).

Beweis: Nach (1.3) ist \mathbb{P}^2 homöomorph zur Kugel S^2/\sim , wobei \sim die gegenüberliegenden Punkte identifiziert. Man kann S^2/\sim auch erhalten, indem man in der Kreisscheibe $D^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1\}$ die gegenüberliegenden Punkte des Randes identifiziert. Man stelle sich D^1 etwa als die Nordhalbkugel der S^2 vor. Da die Kreisscheibe homöomorph zu einem Quadrat ist, folgt die Behauptung. \square

Beispiel: Sei $f(X, Y) = Y - X^2$ und $V(f)$ die Normalparabel. $f^h(X, Y, Z) = ZY - X^2$, daher berührt die Parabel die Unendlichkeitsgerade im Punkt $(0 : 1 : 0)$. $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$ wird somit, wie in Bild 1.6 dargestellt, zu einem Kreis.

Man kann Kurven nicht nur in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{P}^2 betrachten, sondern auf beliebigen algebraischen Varietäten. Für unsere Zwecke sind noch die Kurven auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ von Interesse, die Vorgehensweise ähnelt dabei sehr dem projektiven Fall.

Bild 1.5: \mathbb{P}^2 Bild 1.6: Die Normalparabel
in \mathbb{P}^2 Bild 1.7: Kurve in \mathbb{P}^2 mit
dem Schema $\langle J \rangle$ Bild 1.8: Kurve in \mathbb{P}^2 mit
dem Schema $\langle J \text{ II } 1 \rangle$

1.26 Definition: Ein reelles Polynom $f(X_0, X_1, Y_0, Y_1)$ heißt (α, β) -homogen, wenn es, als Polynom in X_0, X_1 aufgefaßt, homogen vom Grad α , als Polynom in Y_0, Y_1 homogen vom Grad β ist.

1.27 Definition: Falls $f(X_0, X_1, Y_0, Y_1)$ (α, β) -homogen ist, so ist die Menge

$$\{(x_0 : x_1; y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid f(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0\} =: V(f) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

wohldefiniert und soll *biprojektive Kurve* heißen.

1.28 Definition: Sei $f(X_1, Y_1)$ ein reelles Polynom in zwei Variablen, $\alpha = \deg_{X_1} f$, $\beta = \deg_{Y_1} f$. Dann heißt $f^{bh}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) := X_0^\alpha Y_0^\beta f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{Y_1}{Y_0})$ Bihomogenisierung von f .

Offensichtlich ist f^{bh} (α, β) -homogen und es gilt $f(X_1, Y_1) = f^{bh}(1, X_1, 1, Y_1)$.

$$V(f^{bh}) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 := \{(x_0 : x_1; y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid f^{bh}(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0\}$$

heißt der *Abschluß* von $V(f)$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Analog zum projektiven Fall schreibe $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oder $\overline{V(f)}$ statt $V(f^{bh})$, wenn die Unterscheidung nicht wichtig ist.

1.29 Proposition: Sei $f(X_0, X_1, Y_0, Y_1)$ ein reelles (α, β) -homogenes nichtsinguläres Polynom. Dann besteht $V(f) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ aus endlich vielen Kreisen.

Beweis: $V(f) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist wiederum eine glatte kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Der Beweis folgt somit aus dem Klassifikationssatz 1.5.

□

Beispiel: Sei wieder $f(X, Y) = Y - X^2$, $V(f)$ die Normalparabel. $f^{bh}(X_0, X, Y_0, Y) = X_0^2 Y - Y_0 X^2$, es gibt damit genau einen projektiven Punkt der Kurve für $X_0 = Y_0 = 0$ (siehe Abbildung 1.10).

Kurven in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ lassen sich ganz ähnlich wie Kurven in \mathbb{P}^2 mit Schemas beschreiben. Allerdings können auch für $\deg f = (2m_1, 2m_2)$ einseitige Kreise vorkommen. Da $\{f \geq 0\}$ und $\{f \leq 0\}$ in diesem Fall allerdings wohldefiniert sind und zwei disjunkte Gebiete in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit gemeinsamem Rand $V(f)$ beschreiben, tauchen die einseitigen Kreise immer in Paaren auf. Die zwei disjunkten Gebiete, deren Rand sie bilden, sind homöomorph zu einem Kreisring $S^1 \times [0, 1]$. Wir werden ein solches Paar mit J^2 bezeichnen und willkürlich eines der angrenzenden Gebiete als Inneres wählen. Die Schemas $\langle A \amalg J^2 \langle B \rangle \rangle$ und $\langle B \amalg J^2 \langle A \rangle \rangle$ sind somit äquivalente Beschreibungen einer Kurve.

1.30 Proposition: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist homöomorph zu einem Quadrat, dessen gegenüberliegende Seiten in gleicher Richtung miteinander verklebt werden (siehe Skizze 1.9).

Beweis: Nach 1.3 ist \mathbb{P}^1 homöomorph zum Kreis S^1/\sim , in dem die gegenüberliegenden Punkte identifiziert sind. $e^{2\pi t} \mapsto e^{2\pi(2t)}$ ist ein Homöomorphismus von S^1/\sim nach S^1 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist also homöomorph zu $S^1 \times S^1$, einem Torus. Wie leicht zu sehen ist, erhält man durch das Verkleben des Quadrats wie in der Proposition beschrieben ebenfalls einen Torus. \square

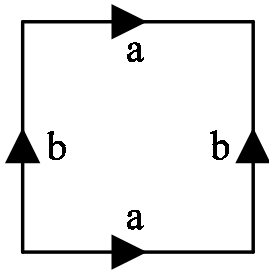


Bild 1.9: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

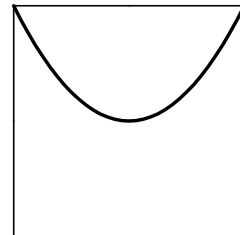


Bild 1.10: Normalparabel in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

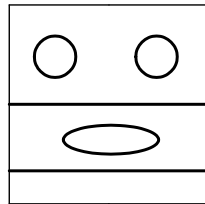


Bild 1.11: Kurve in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit dem Schema $\langle 2 \text{ II } J^2 \langle 1 \rangle \rangle$

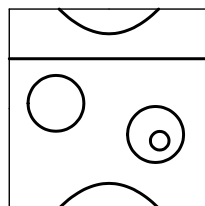


Bild 1.12: Kurve in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit dem Schema $\langle J \text{ II } 2 \text{ II } 1 \langle 1 \rangle \rangle$

II Die Viro-Methode

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit deren Hilfe man komplizierte Kurven durch Zusammensetzen aus mehreren einfachen Kurven gewinnen kann. Zu diesem Zweck werden die Kurven zunächst in eine standardisierte Form, eine sogenannte Karte, gebracht, in dieser Form zusammengelegt und daraus rückwärtsgehend wieder eine Kurve gewonnen. Von zentraler Bedeutung hierfür ist der **Patchwork-Satz** (2.44), der Bedingungen angibt, unter denen der letzte Rückwärtsschritt möglich ist. Er wurde 1983 von **Oleg Viro** in seiner Dissertation⁵ für einen allgemeineren Fall (Nullstellen von Laurent-Polynomen in n Variablen) bewiesen. Wir beschränken uns hier auf 'echte' Polynome in 2 Unbekannten, die zu Beginn der historischen Entwicklung im Mittelpunkt des Interesses standen, die aber auch heute noch ungelöste Fragen zu bieten haben.

Das Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte: Zunächst erfolgt eine Betrachtung des asymptotischen Verhaltens von Kurven und die Definition der Karte einer Kurve, dann wird der Patchwork-Satz für Kurven dargestellt und sein Beweis skizziert. Schließlich wird gezeigt, in welcher Form der Patchwork-Satz in dieser Arbeit angewendet wird.

Einige Bezeichnungen und Begriffe vorneweg:

- Im folgenden sei stets, wenn nicht anders angegeben, $f(X, Y)$ ein reelles Polynom in zwei Variablen,

$$f(X, Y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_{\omega} X^{\omega_1} Y^{\omega_2}$$

($a_{\omega} \neq 0$ nur für endlich viele $\omega \in \mathbb{N}^2$). Für $\Gamma \subset \mathbb{N}^2$ sei

$$f^{\Gamma} = f^{\Gamma}(X, Y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2 \cap \Gamma} a_{\omega} X^{\omega_1} Y^{\omega_2}$$

die *Koeffizienteneinschränkung* von f auf Γ .

- Unter dem *Newton-Polygon* $\Delta(f) \subset \mathbb{R}^2$ versteht man die konvexe Hülle von $\{\omega \in \mathbb{N}^2 \mid a_{\omega} \neq 0\}$.
- Ein Polynom f heiße *quasihomogen*, wenn $\text{Int } \Delta(f) = \emptyset$, d.h. wenn $\Delta(f)$ ein Segment einer Geraden ist⁶.

⁵Die russische Dissertation entspricht allerdings eher der hiesigen Habilitation.

⁶Dabei bezeichne Int das Innere einer Menge.

- Seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ die Seiten von $\Delta(f)$. Dann bezeichne mit $\text{DC}^-(\Gamma_i)$ den Halbstrahl, der senkrecht auf Γ_i steht und bezüglich $\Delta(f)$ nach außen zeigt⁷. Mit n_i dem nach außen gerichteten Normalenvektor ist somit $\text{DC}^-(\Gamma_i) = \{\lambda n_i \mid \lambda \geq 0\}$.
- Seien im folgenden $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Bezeichne mit

$$S_{\varepsilon, \delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\varepsilon x, \delta y)$$

die Spiegelungen an den Koordinatenachsen. Für $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ schreibe

$$\Delta_{\varepsilon, \delta} = S_{\varepsilon, \delta}(\Delta) \quad \text{und}$$

$$\Delta_{\star} = \bigcup_{\varepsilon, \delta} \Delta_{\varepsilon, \delta}.$$

Definiere den (offenen) *Quadranten*

$$Q_{\varepsilon, \delta} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon x > 0, \delta y > 0\}.$$

Damit gilt: $Q_{\varepsilon, \delta} = S_{\varepsilon, \delta}(Q_{++})$ und

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\} = \bigcup_{\varepsilon, \delta} Q_{\varepsilon, \delta}.$$

Statt $V(f) \cap Q_{\varepsilon, \delta}$ schreibe kurz $V_{\varepsilon, \delta}(f)$ und $V_{\star}(f)$ für $V(f) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

- Sei im folgenden stets $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\ln|x|, \ln|y|)$. Die Einschränkung von l auf jeden Quadranten $Q_{\varepsilon, \delta}$ ist ein Diffeomorphismus von $Q_{\varepsilon, \delta}$ nach \mathbb{R}^2 .

2.1 Asymptotisches Verhalten

2.31 Proposition: a) Unter einem Binom soll ein Laurent-Polynom der Form $aX^\alpha - bY^\beta$ ($a, b \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) zu verstehen sein.

Sei $g(X, Y)$ ein solches Binom, dann ist, für jeden Quadranten $Q_{\varepsilon, \delta}$ mit $V_{\varepsilon, \delta}(g) \neq \emptyset$, $l(V_{\varepsilon, \delta}(g))$ eine Gerade parallel zum Vektor (β, α) und damit orthogonal zu seinem Newton-Polygon.

b) Sei $f(X, Y)$ ein reelles, quasihomogenes Polynom, dann ist f Produkt von Binomen mit Monomen und Trinomen, die keine Nullstelle in $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ besitzen. Für jeden Quadranten $Q_{\varepsilon, \delta}$ ist $l(V_{\varepsilon, \delta}(f))$ Vereinigung von Geraden orthogonal zu seinem Newton-Polygon $\Delta(f)$.

Beweis: a) Sei $g(X, Y) = aX^\alpha - bY^\beta$ ein Binom und $Q_{\varepsilon, \delta}$ ein Quadrant, so daß $V_{\varepsilon, \delta}(g) \neq \emptyset$. OBdA kann angenommen werden, daß $\varepsilon = \delta = 1$ und $a, b > 0$ sind, sonst ersetze X durch εX und Y durch δY . Dann ist für $(x, y) \in Q_{\varepsilon, \delta}$

$$g(x, y) = 0 \iff \alpha \ln x + \ln a = \beta \ln y + \ln b.$$

⁷ $\text{DC}^-(\Gamma)$ hängt natürlich nicht nur von Γ , sondern auch von dem Δ ab, aus dem Γ stammt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf einen zusätzlichen Index aber verzichtet.

Ersetzt man in der rechten Gleichung $\ln x$ durch x und $\ln y$ durch y , so erhält man die bestimmende Gleichung des Graphen $l(V_{\varepsilon, \delta}(g))$. Dieser ist offensichtlich eine Gerade parallel zum Vektor (β, α) . Das Newton-Polygon von g ist parallel zum Vektor $(-\alpha, \beta)$ und damit orthogonal zur Geraden.

b) Sei $f(X, Y)$ ein reelles, quasihomogenes Polynom, (s_1, s_2) eine Ecke von $\Delta(f)$ und $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ parallel zu $\Delta(f)$, so daß jedes Monom von $f(X, Y)$ sich schreiben läßt als $X^{s_1} Y^{s_2} (X^{t_1} Y^{t_2})^m$ für $m \in \mathbb{Z}$. Substituiere $S := X^{s_1} Y^{s_2}$, $T := X^{t_1} Y^{t_2}$, erhalte so $f(X, Y) = S g(T)$ für ein reelles Polynom g . Bekanntermaßen läßt sich jedes reelle Polynom in einer Variablen als Produkt irreduzibler Faktoren vom Grad ≤ 2 schreiben, also

$$f(X, Y) = S f_1(T) \dots f_q(T),$$

wo die f_i irreduzibel und $\deg f_i \leq 2$ ($i = 1, \dots, q$). Ein f_i kann eine der folgenden Formen haben:

- $\deg f_i = 0$
- $f_i(T) = aT = aX^{t_1} Y^{t_2}$
- $\deg f_i = 2$: f_i ist ein Trinom in X und Y .

Ihnen allen ist gemeinsam, daß $V_*(f_i) = \emptyset$.

Es bleibt also nur der Fall

$$f_i(T) = aT + b = aX^{t_1} Y^{t_2} + b = Y^{t_2} (aX^{t_1} + bY^{-t_2}) \quad (a, b \neq 0).$$

Der letzte Faktor ist ein Binom, dessen Nullstellenmenge unter l zu einer Geraden parallel zum Vektor $(-t_2, t_1)$ abgebildet wird; diese ist orthogonal zu $\Delta(f)$. \square

Beispiel: $f(X, Y) = Y^3 - 3Y^2 X^2 + 2Y X^4 = Y(Y - X^2)(Y - 2X^2)$

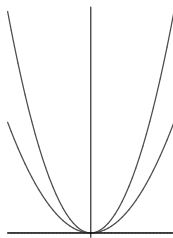


Bild 2.13: $V(f)$

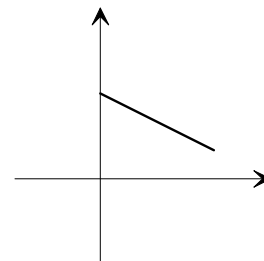


Bild 2.14: $\Delta(f)$

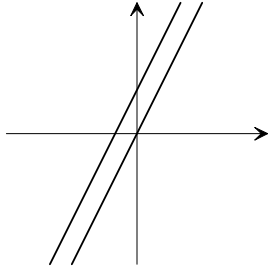


Bild 2.15: $l(V_{++}(f)) = l(V_{+-}(f))$

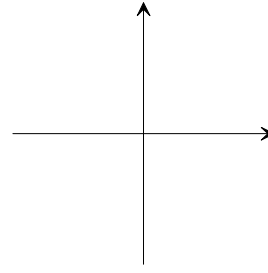


Bild 2.16: $l(V_{-+}(f)) = l(V_{--}(f)) = \emptyset$

2.32 Definition: Ein reelles Polynom $f(X, Y)$ heiße *peripher nichtentartet*, wenn $V_*(f^{\Gamma_i})$ nichtsingulär ist für alle Seiten Γ_i des Newton-Polygons $\Delta(f)$.

2.33 Satz: Sei $f(X, Y)$ ein reelles Polynom, und das Newton-Polygon $\Delta(f)$ habe die Seiten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Für jeden Quadranten $Q_{\varepsilon, \delta}$ und für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt: $l(V_{\varepsilon, \delta}(f^{\Gamma_i}))$ ist Asymptote für $l(V_{\varepsilon, \delta}(f))$ in Richtung $DC^-(\Gamma_i)$ und $l(V_{\varepsilon, \delta}(f))$ strebt nur entlang solcher Linien in Richtung $DC^-(\Gamma_i)$ gegen unendlich. Ist f zusätzlich peripher nichtentartet, so ist sogar jedes $l(V_{\varepsilon, \delta}(f^{\Gamma_i}))$ Asymptote für genau einen Ast von $l(V_{\varepsilon, \delta}(f))$.

Beweis: Der Beweis erfolgt in 3 Schritten: Zunächst wird gezeigt, daß 'weit weg' von den Geraden $l(V(f^\Gamma))$ das Polynom f nicht 0 wird. Dann wird gezeigt, daß $l(V(f))$ jede noch so nahe Parallele einer solchen Geraden schneidet und in den Zwischenbereich zwischen ihnen hineinläuft (und dort bleibt). Abschließend wird gezeigt, daß die Vielfachheit einer Komponente von $l(V(f^\Gamma))$ groer oder gleich der Anzahl der Äste von $l(V(f))$ ist, die darauf zulaufen.

Durchgehend reicht es, $x, y > 0$ zu betrachten: Setze in diesem Fall $x = e^{z_1}$, $y = e^{z_2}$ und erhalte so $f(x, y) = \tilde{f}(z_1, z_2) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega e^{\langle \omega, z \rangle}$ (\tilde{f} beschreibt $l(V(f))$). Sei ferner für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$ der Kegel $K_{v, \varepsilon} := \{t(v + \varepsilon'u) \mid t > 0, |\varepsilon'| < \varepsilon\}$ definiert, wobei $u \perp v$ und $\|u\| = 1$.

1. Schritt: Seien n_i die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren der Γ_i , und für $\delta > 0$ sei $U_\delta := \bigcup_i K_{n_i, \delta}$. Sei nun $v \in \mathbb{R}^2 \setminus U_\delta$, $u \perp v$, $\|v\| = \|u\| = 1$ und $z \in K_{v, \varepsilon}$. Dann ist, mit $\omega = \omega'_1 v + \omega'_2 u$ und $\hat{\omega}'_1 = \max_{\omega \in \Delta(f)} \omega'_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z_1, z_2) &= \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega e^{\langle \omega, z \rangle} = \sum_{\omega' \in \mathbb{N}^2} a_{\omega'} e^{\langle \omega', z' \rangle} = \sum_{\omega' \in \mathbb{N}^2} a_{\omega'} e^{t\omega'_1 + t\varepsilon\omega'_2} \\ &= \sum_{\omega'_1 = \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{t\omega'_1 + t\varepsilon\omega'_2} + \sum_{\omega'_1 < \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{t\omega'_1 + t\varepsilon\omega'_2} \\ &= a_{\hat{\omega}'_1} e^{t(\hat{\omega}'_1 + \varepsilon\hat{\omega}'_2)} + \sum_{\omega'_1 < \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{t(\omega'_1 + \varepsilon\omega'_2)} \\ &= e^{t(\hat{\omega}'_1 + \varepsilon\hat{\omega}'_2)} \left(a_{\hat{\omega}'_1} + \sum_{\omega'_1 < \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{t((\omega'_1 - \hat{\omega}'_1) + \varepsilon(\omega'_2 - \hat{\omega}'_2))} \right). \end{aligned}$$

Für ε klein genug ist $|\varepsilon(\omega'_2 - \hat{\omega}'_2)|$ stets kleiner als $|(\omega'_1 - \hat{\omega}'_1)|$. Der rechte Term geht somit für $t \rightarrow \infty$ gegen Null und somit $f(z_1, z_2) \neq 0$, falls $\|z\|$ groß genug. $\mathbb{R}^2 \setminus U_\delta$ kann für alle $\delta > 0$ von endlich vielen Kegeln der Form $K_{v,\varepsilon}$ bedeckt werden, es gibt somit eine gemeinsame Schranke $R > 0$, so daß $\tilde{f}(z_1, z_2) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^2 \setminus U_\delta$ mit $\|z\| > R$.

2. Schritt: Sei Γ eine Seite von $\Delta(f)$ und g eine Komponente von $l(V(f^\Gamma))$, etwa $g = \{(a, b) + t(n_1, n_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Sei $g_\varepsilon := g + \varepsilon m$ ($m \perp n$) eine Parallele zu g mit Abstand ε . Sei etwa $\tilde{f}|_g(z_1, z_2) > 0$ für $\|z\|$ groß, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß $\tilde{f}|_{g_\varepsilon}(z_1, z_2) > 0$, falls $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Betrachte nun \tilde{f} auf solch einem g_ε , es gilt mit $\omega = \omega'_1 n + \omega'_2 m$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z_1, z_2) &= \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega e^{\langle \omega, z \rangle} = \sum_{\omega' \in \mathbb{N}^2} a_{\omega'} e^{\langle \omega', z' \rangle} \\ &= \sum_{\omega' \in \mathbb{N}^2} a_{\omega'} e^{\langle \omega', (a', b') \rangle + t\omega'_1 + \varepsilon\omega'_2} \\ &= \sum_{\omega'_1 = \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{c_1 + t\omega'_1 + \varepsilon\omega'_2} + \sum_{\omega'_1 < \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{c_1 + t\omega'_1 + \varepsilon\omega'_2} \\ &= e^{t\hat{\omega}'_1} \left(\sum_{\omega'_1 = \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{c_1 + \varepsilon\omega'_2} + \sum_{\omega'_1 < \hat{\omega}'_1} a_{\omega'} e^{c_1 + t(\omega'_1 - \hat{\omega}'_1) + \varepsilon\omega'_2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Der linke Summand stellt $\tilde{f}^\Gamma(z_1, z_2)$ dar, für geeignete Wahl des Vorzeichens von ε läßt sich erreichen, daß dieser Term < 0 ist. Für $|\varepsilon|$ klein genug, ist der Exponent des rechten Summanden stets negativ und somit geht der rechte Summand für $t \rightarrow \infty$ gegen Null und das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks wird negativ. Aus diesem Vorzeichenwechsel wird ersichtlich, daß \tilde{f} und somit $l(V(f))$ die Gerade g_ε schneidet und in den Bereich zwischen g und g_ε hineinläuft.

3. Schritt: Sei Γ eine Seite von $\Delta(f)$. Wie im Beweis zu Proposition 2.31 läßt sich $f^\Gamma(X, Y)$ schreiben als

$$f^\Gamma(X, Y) = g(S, T) = S^m c_1(T) \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i),$$

wobei $c_1(T)$ keine Nullstellen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt. Dementsprechend gilt

$$f(X, Y) = S^m \left(c_1(T) \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i) + p_1\left(\frac{1}{S}, T\right) \right).$$

Wir betrachten f in der Nähe der Geraden $T = \alpha_1$. Durch Transformation $T \mapsto T + \alpha_1$ kann angenommen werden, daß $\alpha_1 = 0$. Für $S \rightarrow \infty$ erhalten wir für den letzten Klammersausdruck

$$c_2(T)T^\nu + p_2(T). \quad (*)$$

Die Koeffizienten von $p_2(T)$ hängen von S ab und können beliebig klein gemacht werden, $c_2(0) \neq 0$, d.h. $c_2(T) \approx c$ für $T \approx 0$. Das obige Polynom (*) hat somit

maximal ν Nullstellen in der Nähe von Null (die Terme von p_2 höherer Ordnung als ν liefern in der Nähe von Null keinen wesentlichen Beitrag). Diese entsprechen den Komponenten von f , die gegen die (ν -fache) Komponente von f^Γ , die durch $T = 0$ bestimmt ist, streben. Ist $f(X, Y)$ peripher nichtentartet, so ist $\nu = 1$ und somit strebt auch nur eine Komponente von $l(V(f))$ gegen die die entsprechende Komponente von $l(V(f^\Gamma))$. \square

Beispiel: Sei $f(X, Y) = 8X^3 - X^2 + 4Y^2$.

Dann sind $f^{\Gamma_1} = 4Y^2 + 8X^3$, $f^{\Gamma_2} = 8X^3 - X^2$, $f^{\Gamma_3} = 4Y^2 - X^2$ und f ist peripher nichtentartet.

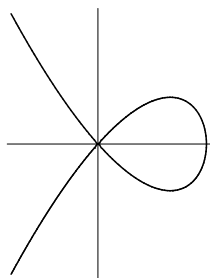


Bild 2.17: $V(f)$

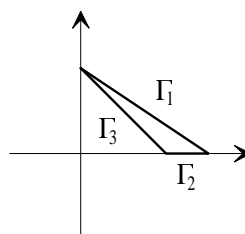


Bild 2.18: $\Delta(f)$

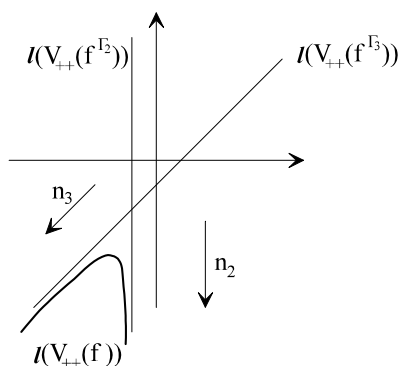


Bild 2.19: $V_{++}(f)$ transformiert durch l

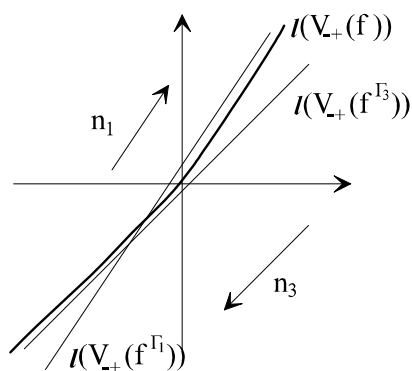


Bild 2.20: $V_{-+}(f)$ transformiert durch l

Es gilt $V_{+-}(f) = V_{++}(f)$ und $V_{--}(f) = V_{-+}(f)$. Entsprechend gespiegelt lassen sich diese vier Kurven folgendermaßen darstellen:

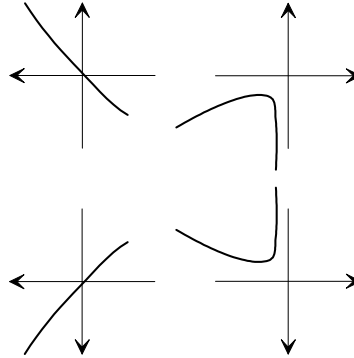


Bild 2.21: Gesamtbild

Die Teilstücke scheinen wieder zur ursprünglichen Kurve zusammenwachsen zu wollen. Dieser anschauliche Prozess wird im folgenden systematisiert:

Es liegt nahe, das Aussehen einer Kurve in das asymptotische Verhalten und das Aussehen 'in der Nähe' von 0 zu trennen. Ein Ansatz wäre zum Beispiel, eine Scheibe um 0 herum groß genug zu wählen, so daß das Verhalten der Kurve außerhalb dieser Scheibe nur vom asymptotischen Verhalten geprägt ist, und den Raum außerhalb der Scheibe auf den Rand zusammendrücken. Unter geeigneten Umständen wäre dann die gesamte Information über die Kurve in dieser kompakten Menge enthalten. Die entscheidende Idee, die nachfolgend zur Definition einer *Karte* von f führt, liegt darin, die einzelnen Sektoren der Scheibe (die Schnitte der Scheibe mit den Quadranten $Q_{\varepsilon,\delta}$) homöomorph zum entsprechenden $\Delta_{\varepsilon,\delta}$ zu verformen. Dabei wird nicht nur das Verhalten gegen unendlich als asymptotisch angesehen, sondern auch das Verhalten bei Annäherung an die Koordinatenachsen.

2.2 Karten

2.34 Definition: Sei $f(X, Y)$ ein reelles Polynom mit Newton-Polygon $\Delta = \Delta(f)$. Eine *Karte* von f wird nun sukzessive für zwei Fälle definiert:

a) f ist quasihomogen:

Unter einer Karte von f versteht man ein Paar (Δ_*, κ) , wobei $\kappa \subset \Delta_*$ eine endliche Punktmenge ist, so daß

(1) die Anzahl der Punkte in $\kappa \cap \Delta_{\varepsilon,\delta}$ gleich der Anzahl der Komponenten von $V_{\varepsilon,\delta}(f)$ ist, wobei $\partial\Delta_{\varepsilon,\delta} \cap \kappa = \emptyset$, und

(2) für jeden Vektor (α, β) orthogonal zu $\Delta(f)$, κ invariant unter der Spiegelung $S_{(-1)^\alpha, (-1)^\beta}$ ist.

b) f ist nicht quasihomogen:

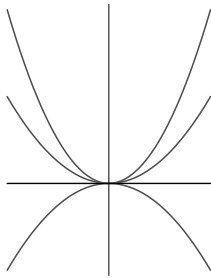
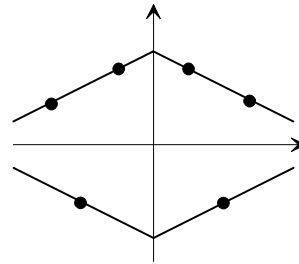
Sei wieder $\Delta = \Delta(f)$ das Newton-Polygon mit Seiten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine

Scheibe um 0 und D_1, \dots, D_n jeweils Umgebungen von $DC^-(\Gamma_1), \dots, DC^-(\Gamma_n)$, so daß $l(V_*(f)) \subset D \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ und so daß $l(V(f) \cap (D_i \setminus D))$ durch $l(V(f^{\Gamma_i}) \cap (D_i \setminus D))$ approximiert wird und $V(f) \cap l^{-1}(D_i \setminus D)$ zusammengezogen werden kann auf den Rand $V(f) \cap l^{-1}(D_i \cap \partial D)$. Unter einer Karte von f versteht man nun ein Paar (Δ_*, κ) mit einer Kurve $\kappa \subset \Delta_*$, falls

- (1) für alle $i = 1, \dots, n$ $(\Gamma_i)_*$, $(\Gamma_i)_* \cap \kappa$ eine Karte von f^{Γ_i} ist und
- (2) für alle $\varepsilon, \delta = \pm 1$ ein Homöomorphismus $h_{\varepsilon, \delta} : D \rightarrow \Delta$ existiert, so daß $\kappa \cap \Delta_{\varepsilon, \delta} = S_{\varepsilon, \delta} \circ h_{\varepsilon, \delta} \circ l(V(f) \cap l^{-1}(D) \cap Q_{\varepsilon, \delta})$.

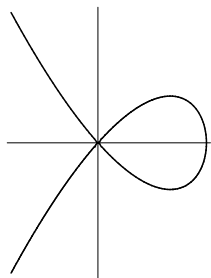
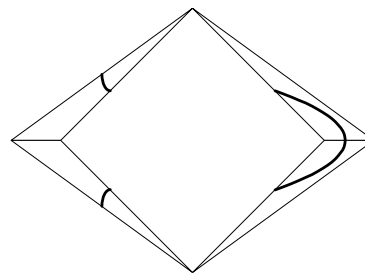
Bemerkung: Die Bedingung (2) in Teil a) der Definition stellt sicher, daß eine Karte von f dieselben Symmetrien besitzt wie $V(f)$.

Beispiele: a) $f(X, Y) = (Y + X^2)(Y + 2X^2)(Y - X^2)Y = Y^4 + 2Y^3X^2 - Y^2X^4 - 2YX^6$.

Bild 2.22: $V(f)$ Bild 2.23: Karte von f

b) $g(X, Y) = 4Y^2 + 8X^3 - X^2$.

Siehe die Abbildungen auf Seite 36.

Bild 2.24: $V(g)$ Bild 2.25: Karte von g

Bemerkung: Zu jedem Polygon $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ läßt sich eine reelle (2-dimensionale) torische Varietät X_Δ definieren (siehe [Ful]). Topologisch erhält man X_Δ , indem man die vier Kopien $\Delta_{\varepsilon, \delta}$ an den Kanten geeignet miteinander verklebt (\mathbb{P}^2 und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sind Beispiele davon, siehe Kapitel I).

Eine Karte eines Polynoms f mit $\text{Int } \Delta(f) \neq \emptyset$ ist nun nichts anderes (bis auf Homöomorphismus) als das Paar $(\tilde{X}_{\Delta(f)}, \overline{V(f)})$, wobei $\overline{V(f)}$ der topologische Abschluß von $V(f)$ in $X_{\Delta(f)}$ ist und $\tilde{X}_{\Delta(f)}$ aus $X_{\Delta(f)}$ entsteht, indem man $X_{\Delta(f)}$ in die den Polygonen $\Delta_{\varepsilon, \delta}$ entsprechenden Teile zerlegt. Aus diesem Grund ist klar, daß es zu jedem reellen Polynom f mit $\text{Int } \Delta(f) \neq \emptyset$ eine Karte von f gibt. Eine solche Karte ist eindeutig, bis auf einen Homöomorphismus $\varphi : \Delta_* \rightarrow \Delta_*$, der die Ecken und Kanten unverändert läßt.

Die Topologie von $(X_{\Delta(f)}, \overline{V(f)})$ läßt sich natürlich ganz einfach wiedergewinnen, indem man die Teilstücke von $\tilde{X}_{\Delta(f)}$ wieder miteinander verklebt. Doch man kann aus einer Karte von f auch die Topologie von $(\mathbb{R}^2, V(f))$ sowie $(X_{\Delta}, \overline{V(f)} \subset X_{\Delta})$ für jedes beliebige Polygon $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ wiedergewinnen.

2.35 Proposition: Sei $f(X, Y)$ ein reelles Polynom mit Newton-Polygon $\Delta = \Delta(f)$ und (Δ_*, κ) eine Karte von f . Ausgehend von (Δ_*, κ) lassen sich Räume (Δ', κ') , (Δ'', κ'') und (Δ''', κ''') konstruieren, die homöomorph zu $(\mathbb{R}^2, V(f))$ bzw. $(\mathbb{P}^2, \overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2)$ bzw. $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ sind.

(Hier wie auch weiterhin soll heissen, (X, A) ist homöomorph zu (Y, B) , daß es einen Homöomorphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ gibt mit $\varphi(A) = B$.)

Beweis: Im Grunde klar: Da \mathbb{R}^2 dicht in jeder (2-dimensionalen) torischen Varietät ist, lassen sich $V(f)$ und $\overline{V(f)}$ durch Schnittbildung mit \mathbb{R}^2 bzw. Abschließen in der entsprechenden torischen Varietät erhalten.

Nachfolgend wird noch eine explizite Methode angegeben, um $(\mathbb{P}^2, \overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2)$ aus einer Karte von f zu rekonstruieren. Dieselben Prinzipien lassen sich ganz analog auch auf alle anderen torischen Varietäten anwenden, insbesondere auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Zur Notation: Ein Punkt mit affinen Koordinaten (x, y) habe homogene Koordinaten $(x : y : 1)$.

1. Fall: Δ hat Seiten mit Normalenvektor $(0, -1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 1)$: Diese Seiten seien Γ_1, Γ_2 und Γ_0 .

Ziehe alle Seiten von Δ zwischen Γ_2 und Γ_1 (also alle Seiten Γ_i mit Normalenvektor n_i , so daß $-\pi < \arg(n_i) < -\frac{1}{2}\pi$) zu einem Punkt zusammen; Komponenten von $\kappa \subset \Delta$, die an diesen Seiten enden, entsprechen Komponenten von $V(f)$, die gegen $(0 : 0 : 1)$ streben.

Ziehe entsprechend alle Seiten zwischen Γ_1 und Γ_0 ($-\frac{\pi}{2} < \arg(n_i) < \frac{\pi}{4}$) und die Seiten zwischen Γ_0 und Γ_2 ($\frac{\pi}{4} < \arg(n_i) < \pi$) zusammen (entspricht Komponenten, die gegen $(1 : 0 : 0)$ bzw. $(0 : 1 : 0)$ streben).

Führe die entsprechenden Operationen an den restlichen $\Delta_{\varepsilon, \delta}$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$, durch, jeweils gemäß der Spiegelung $S_{\varepsilon, \delta}$.

Die Seiten $(\Gamma_1)_{\varepsilon, \delta}$ entsprechen den Komponenten von $V_{\varepsilon, \delta}(f)$, die gegen die x -Achse laufen, $(\Gamma_2)_{\varepsilon, \delta}$ gegen die y -Achse und $(\Gamma_0)_{\varepsilon, \delta}$ gegen die projektive Gerade.

Identifiziere also

$$\begin{aligned} (\Gamma_1)_{++} &\text{ mit } (\Gamma_1)_{+-}, (\Gamma_1)_{-+} &\text{ mit } (\Gamma_1)_{--} \\ (\Gamma_2)_{++} &\text{ mit } (\Gamma_2)_{-+}, (\Gamma_2)_{+-} &\text{ mit } (\Gamma_2)_{--} \\ (\Gamma_0)_{++} &\text{ mit } (\Gamma_0)_{--}, (\Gamma_0)_{+-} &\text{ mit } (\Gamma_0)_{-+} \end{aligned}$$

entsprechend der Spiegelungen $S_{\varepsilon,\delta}$. Für $p \in (\Gamma_i)_{\varepsilon,\delta}$, $p' \in (\Gamma_{i'})_{\varepsilon',\delta'}$ bedeutet das

$$p \sim p' \iff S_{\varepsilon^{-1}\varepsilon',\delta^{-1}\delta'}(p) = p'$$

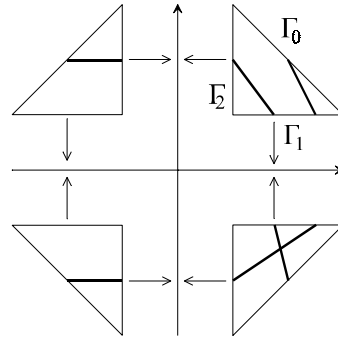
Das Resultat Δ' ist gemäß Kapitel I homöomorph zu \mathbb{P}^2 , κ' ist nach Konstruktion homöomorph zu $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$.

2. Fall: Ist eine der im 1. Falle geforderten Seiten Γ_1, Γ_2 oder Γ_0 nicht vorhanden, so muß eine solche zunächst eingefügt werden:

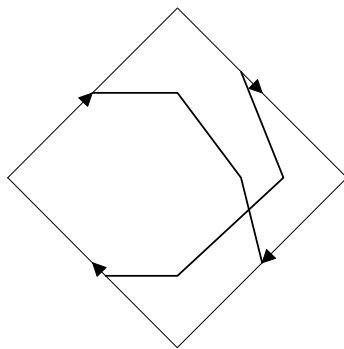
Für jedes fehlende Γ_i füge in $\partial\Delta$ zwei zu n_i orthogonale Kanten so ein, daß dabei der Rand eines konvexen Polygons entsteht und ersetze Δ durch dieses Polygon. Verlängere entsprechend κ im Innern homöomorph. Setze diese Operationen auf Δ_* fort. Verfahre nun mit dem so erhaltenen (Δ_*, κ) wie im 1. Fall beschrieben. \square

Beispiele:

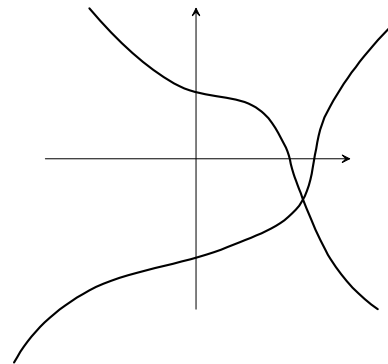
a) $f(X, Y) = XY((Y + 1)^2 - (X - 2)^2) = XY(Y^2 + 2Y - X^2 + 4X - 3)$



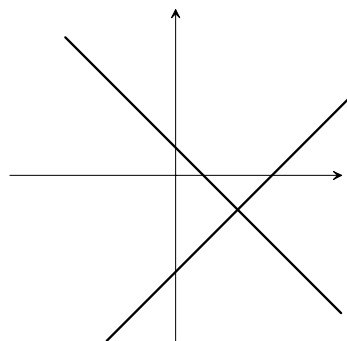
Karte von f



Rekonstruktion von $V(f)$ in \mathbb{P}^2



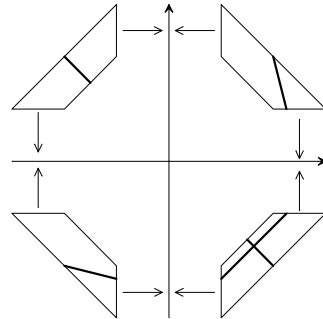
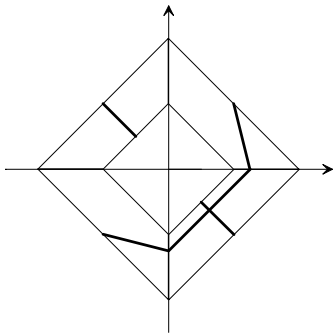
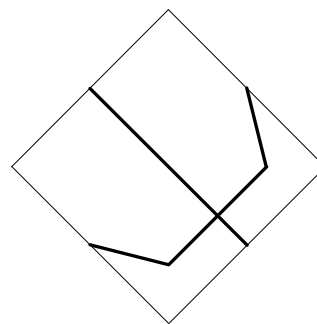
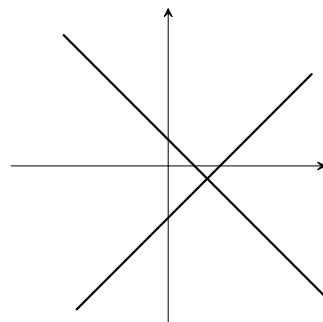
Rekonstruktion von $V(f)$ in \mathbb{R}^2



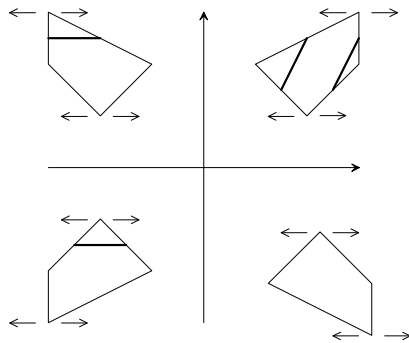
$V(f)$

Bild 2.26: Rekonstruktion von $V(f)$ durch sofortige Identifikation der Seiten

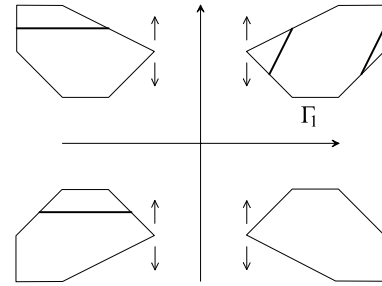
b) $f(X, Y) = XY((Y + 1)^2 - (X - 1)^2) = XY(Y^2 + 2Y - X^2 + 2X)$

Karte von f Nach Identifikation der
SeitenNach dem Zusammenziehen
der Innenseiten $V(f)$ Bild 2.27: Rekonstruktion von $V(f)$ mittels Zusammenziehen von Seiten

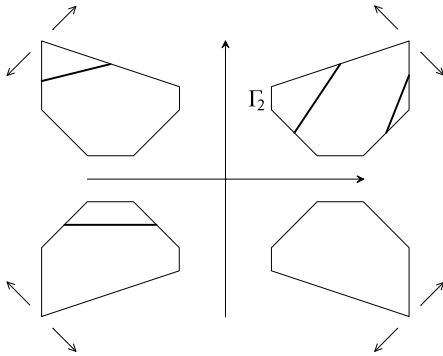
c) $f(X, Y) = XY(Y - X + X^2Y - X^2Y^2)$



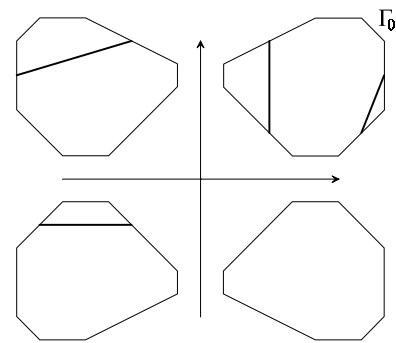
Karte von f



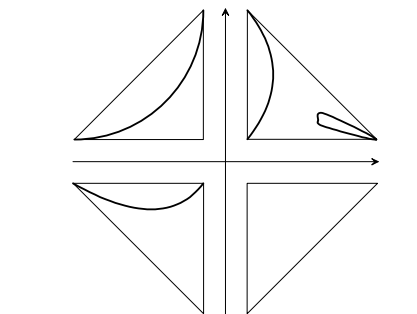
Nach Ergänzung von Γ_1



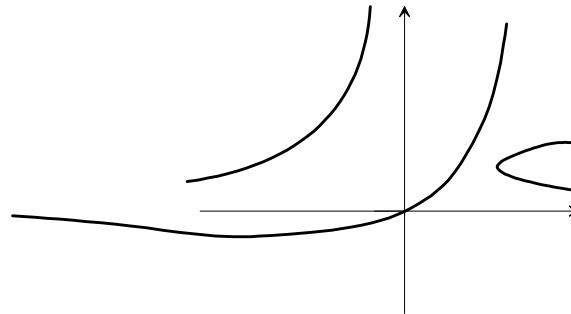
Nach Ergänzung von Γ_2



Nach Ergänzung von Γ_0



Nach dem Zusammenziehen
der Seiten



$V(f)$

Bild 2.28: Rekonstruktion von $V(f)$ aus der Karte von f mittels Ergänzung von Seiten

Die beschriebene Technik der Konstruktion von Karten weckt natürlicherweise sofort den Wunsch, zusammenpassende Karten zusammenzulegen und so neue, komplexere Karten von Kurven zu erhalten, deren Topologie sich sofort ablesen ließe. Es ist a priori allerdings nicht zu erwarten, daß eine solche 'Pseudokarte' tatsächlich die Karte einer existierenden Kurve ist. Der Patchwork-Satz von Viro läßt diesen Wunsch jedoch in Erfüllung gehen, denn er zeigt, daß in vielen wichtigen Fällen eine Kurve existiert, für die dieses 'Flickwerk' eine Karte darstellt.

Die folgenden Definitionen dienen der Vorbereitung dieses bemerkenswerten Satzes.

2.3 Triangulationen

2.36 Definition: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, ein konvexes Polygon. $(\Delta_i)_{i=1}^N$ ist eine *Unterteilung von Δ in konvexe Polygone*, falls gilt:

- Δ_i ist konvexes Polygon mit $\text{LH}(\Delta_i) = \mathbb{R}^m$ für alle $i = 1, \dots, N$,⁸
- $\bigcup_{i=1}^N \Delta_i = \Delta$,
- $\Delta_i \cap \Delta_j$ ist eine gemeinsame Seite (eventuell leer) von Δ_i und Δ_j für alle $i, j = 1, \dots, N$.

Wir sprechen in diesem Falle auch kurz von einer *Unterteilung von Δ* . Im Spezialfall, daß alle Δ_i Simplexes sind, sprechen wir von einer *Triangulation von Δ* .

2.37 Definition: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes Polygon mit einer Unterteilung $(\Delta_i)_{i=1}^N$ von Δ und seien $(\sigma_l)_{l=1}^n$ die Ecken aller Δ_i . Eine Funktion $\nu : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng konvex* auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$, falls

- (1) $\nu|_{\Delta_i}$ affin-linear ist für alle $i = 1, \dots, N$ und
- (2) $\nu(\sigma_l) > \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l)$ für alle $\sigma_l \notin \Delta_i$ (wobei $\nu|_{\Delta_i}$ linear auf ganz \mathbb{R}^m fortgesetzt ist).

ν heißt *\mathbb{N} -wertig streng konvex*, falls zusätzlich $\nu(\sigma_l) \in \mathbb{N}$ für alle Ecken σ_l , $l = 1, \dots, n$, gilt.

Eine Funktion, die (1) erfüllt, wird *stückweise linear* auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ genannt.

2.38 Proposition: Wenn ν eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ ist, dann auch $\lambda\nu + \alpha$ für jede affine Funktion $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und für alle $\lambda > 0$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition. □

2.39 Definition: Eine Unterteilung $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eines konvexen Polygons $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ heißt *regulär*, falls es eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ gibt.

⁸LH bezeichne die lineare Hülle.

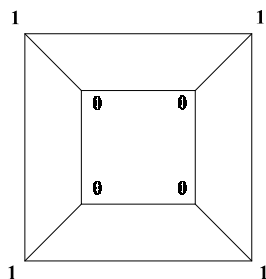


Bild 2.29: Reguläre Unterteilung.

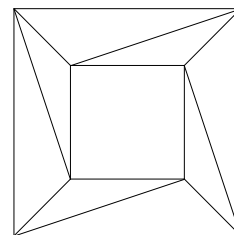


Bild 2.30: Nicht-reguläre Triangulation.

Bemerkung: Ein Beispiel einer nicht-regulären Unterteilungen eines konvexen Polygons ist in Bild 2.30 gegeben. Zu beachten ist, daß die Unterteilung in Bild 2.29 regulär ist (durch die angegebenen Werte an den Ecken ist eine streng konvexe Funktion bestimmt). Eine Unterteilung einer schon bestehenden, regulären Unterteilung, ist also nicht unbedingt regulär, auch wenn, wie in diesem Falle, jedes Polygon der Unterteilung selbst regulär unterteilt wird.

Für die Viro-Methode sind wir letzten Endes nur an regulären Triangulationen und \mathbb{N} -wertigen streng konvexen Funktionen auf ihnen interessiert. Durch die hier geschehene Erweiterung des Konzepts lassen sich viele Beweise allerdings einfacher und übersichtlicher gestalten.

2.40 Proposition: Sei ν eine stückweise lineare Funktion auf einer Unterteilung $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eines konvexen Polygons $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ (erfülle also Bedingung (1)). Seien $(\sigma_l)_{l=1}^n$ die Ecken der $(\Delta_i)_{i=1}^N$. Es gibt nun eine minimale Teilmenge $\{l_1, \dots, l_{n'}\} \subset \{1, \dots, n\}$, $n' \leq n$, so daß ν eindeutig durch die Werte an den Ecken $\sigma_{l_1}, \dots, \sigma_{l_{n'}}$ bestimmt ist; dabei ist n' unabhängig von der Wahl einer solchen Menge. ν kann somit mit einem Punkt in $\mathbb{R}^{n'}$ identifiziert werden:

$$\nu \longleftrightarrow (\nu_1, \dots, \nu_{n'}),$$

wobei $\nu_j := \nu(\sigma_{l_j})$.

Bemerkung: Falls $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine Triangulation von Δ ist, so gilt $n' = n$.

Beweis: Die stückweise linearen Funktionen auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum W . Durch $(\nu \mapsto (\nu(\sigma_1), \dots, \nu(\sigma_n)))$ ist eine Injektion $W \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert, durch die W als Unterraum des \mathbb{R}^n aufgefaßt werden kann. W wird erzeugt durch $\{w_1, \dots, w_n\}$, mit $w_l(\sigma_l) = 1$ und $w_l(\sigma_k) = 0$ für $k \neq l$. Die Wahl einer minimalen Teilmenge $\{l_1, \dots, l_{n'}\}$ entspricht somit der Wahl einer Basis $\{w_{l_1}, \dots, w_{l_{n'}}\}$ und $n' = \dim W$ ist unabhängig von der Wahl einer solchen Teilmenge. \square

2.41 Proposition: Sei $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine Unterteilung von Δ mit den Ecken $(\sigma_l)_{l=1}^n$ und sei $C \subset \mathbb{R}^{n'}$ die Menge der streng konvexen Funktionen auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$. C ist ein offener Kegel in $\mathbb{R}^{n'}$, d.h. C ist offen und für $\nu \in C$ gilt $\lambda\nu \in C$ für alle $\lambda > 0$.

Beweis: Nach Proposition 2.38 ist C ein Kegel. Es bleibt somit zu zeigen, daß C offen ist. Für $C = \emptyset$ ist alles klar, sei also $\nu \in C$.

Jedes $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n'})$ definiert eine stückweise lineare Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$. Es sei

$$\hat{\varepsilon} := \max_{\substack{i,l \\ \sigma_l \notin \Delta_i}} (\varepsilon(\sigma_l) - \varepsilon|_{\Delta_i}(\sigma_l)) \geq 0,$$

sowie

$$\|\varepsilon\|_{\mathbb{R}^{n'}} = \max\{|\varepsilon_1|, \dots, |\varepsilon_{n'}|\} \quad \text{und} \quad \|\varepsilon\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Delta} |\varepsilon(x)|.$$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ und $\|\cdot\|_{L^\infty}$ definieren äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^{n'}$. Es ist ferner leicht einsichtig, daß es eine Konstante $R > 0$ gibt, so daß $\hat{\varepsilon} \leq R\|\varepsilon\|_{L^\infty}$ gilt (R hängt nur vom Durchmesser von Δ und der Δ_i ab). Setze ferner

$$c := \min_{\substack{i,l \\ \sigma_l \notin \Delta_i}} (\nu(\sigma_l) - \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l)) > 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 := \frac{c}{R}.$$

Zeige nun, daß $\nu + \varepsilon$ Bedingung (2) erfüllt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n'}$ mit $\|\varepsilon\|_{L^\infty} < \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} & (\nu + \varepsilon)(\sigma_l) - (\nu + \varepsilon)|_{\Delta_i}(\sigma_l) \\ &= \nu(\sigma_l) - \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l) + \varepsilon(\sigma_l) - \varepsilon|_{\Delta_i}(\sigma_l) \\ &\geq \nu(\sigma_l) - \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l) - R\|\varepsilon\|_{L^\infty} > c - c = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Normenäquivalenz folgt die Behauptung. \square

2.42 Korollar: $(\Delta_i)_{i=1}^N$ ist eine reguläre Triangulation von Δ genau dann, wenn es eine \mathbb{N} -wertige streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ gibt.

Beweis: Sei $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ der offene Kegel aller streng konvexen Funktionen auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$. Da \mathbb{Q}^n dicht in \mathbb{R}^n ist, existiert $\tilde{\nu} \in C \cap \mathbb{Q}^n$. Für geeignete $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$ hat $a\tilde{\nu} + b$ nur positive, ganzzahlige Koordinaten $\nu(\sigma_1), \dots, \nu(\sigma_n)$, andererseits definiert $a\tilde{\nu} + b$ weiterhin eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$. \square

2.4 Der Patchworksatz

2.43 Definition: Ein reelles Polynom $f(X, Y)$ heiße *vollständig nichtentartet*, wenn $V_*(f)$ nichtsingulär und f peripher nichtentartet ist.

Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon, f_1, \dots, f_s reelle, vollständig nichtentartete Polynome, so daß $\Delta = \bigcup_{i=1}^s \Delta(f_i)$, wobei

$$\text{Int } \Delta(f_i) \cap \text{Int } \Delta(f_j) = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad f_i^{\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j)} = f_j^{\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j)}$$

für alle $i, j = 1, \dots, s$. Falls $(\Delta_*(f_i), \kappa_i)$ die Karten der f_i sind, kann daher angenommen werden, daß

$$\kappa_i \cap (\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j)) = \kappa_j \cap (\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j))$$

gilt. Sei f das (eindeutige) Polynom mit $\Delta(f) = \Delta$ und $f^{\Delta(f_i)} = f_i$ für alle $i = 1, \dots, s$, etwa $f(X, Y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega X^{\omega_1} Y^{\omega_2}$. Sei $\nu : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^s$, dann definiere für $t \in \mathbb{R}$

$$h_t(X, Y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega X^{\omega_1} Y^{\omega_2} t^{\nu(\omega)}.$$

Wir schreiben, daß ein solches h_t durch Zusammensetzen (Patchwerken) von f_1, \dots, f_s vermittelt ν entstanden ist. h_t kann je nach Bedarf als Polynomschar mit Parameter t oder als Polynom in drei Variablen betrachtet werden.

Der folgende Satz sagt aus, daß h_t für geeignetes t genau das gesuchte Polynom ist, dessen Karte aus den einzelnen Karten der f_i zusammengesetzt ist.

2.44 Der Patchworksatz: In der eben beschriebenen Situation gibt es ein $t_0 > 0$, so daß für alle $t \in [0, t_0]$ h_t vollständig nichtentartet und $(\bigcup_{i=1}^s \Delta_*(f_i), \bigcup_{i=1}^s \kappa_i)$ eine Karte von h_t ist.

Der Beweis des Satzes erfordert eine Verallgemeinerung der bisherigen Begriffe und Konzepte auf höhere Dimensionen; insbesondere wird die Konstruktion von torischen Varietäten aus beliebigen Polyedern höherer Dimension benötigt. Dies hat den Vorteil, daß sich der Patchwork-Satz auf ganz natürliche Weise auch auf Polynome mit mehr als zwei Variablen verallgemeinern läßt. Diese Techniken werden im weiteren Verlauf bei der Anwendung des Satzes allerdings nicht mehr benötigt; es scheint mir daher gerechtfertigt, den Beweis hier nicht mit allen Details wiederzugeben, sondern stattdessen nur die Ideen zu skizzieren. Für den interessierten und mit torischen Varietäten vertrauten Leser findet sich ein vollständiger Beweis (in verallgemeinerter Fassung) bei Viro [ViPW].

Beweisskizze: Fasse ν als Funktion auf, die jedem Punkt in Δ eine 'Höhe' liefert, definiere dementsprechend $\widetilde{\Delta(f_i)} := \{(p, \nu(p)) \mid p \in \Delta(f_i)\}$. Fasse $h_t(X, Y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^2} a_\omega X^{\omega_1} Y^{\omega_2} t^{\nu(\omega)}$ als Polynom in drei Variablen auf und sei $\Delta(h_t) \subset \mathbb{R}^3$ dessen Newton-Polygon. Durch die Konvexität von ν ist gewährleistet, daß die $\widetilde{\Delta(f_i)}$ genau die Facetten von $\Delta(h_t)$ sind, die in Richtung der $\{t = 0\}$ -Ebene weisen. Eine Karte $(\Delta_*(h_t), \kappa_t)$ von h_t ist nun ganz analog zur bisherigen Definition ein Abbild des Abschlusses von $V(h_t)$ in einer geeigneten Vervollständigung von \mathbb{R}^3 (der zu $\Delta(h_t)$ gehörigen torischen Varietät $X_{\Delta(h_t)}$).

Einerseits sieht $\kappa_t \cap \widetilde{\Delta(f_i)}$ nun genauso aus wie $\kappa \cap \Delta(f_i)$, nur mit zusätzlicher Höheninformation, und damit ist $V(h_t^{\Delta(f_i)}) \subset X_{\widetilde{\Delta(f_i)}}$ homöomorph zu $V(f_i) \subset X_{\Delta(f_i)}$; andererseits beschreibt $\kappa_t \cap \widetilde{\Delta(f_i)}$ das Verhalten von h_t für $t \rightarrow 0$, woraus die Behauptung folgt.

Beispiele:

a) $f(X, Y) = 8X^3 - X^2 + 4Y^2$, $g(X, Y) = 4Y^2 - X^2 + 1$.

Mit der konvexen Funktion ν , wie sie durch die Werte in Abb. 2.35 gegeben ist, ergibt sich das Polynom $h_t(X, Y) = 8X^3 - X^2 + 4Y^2 + t$.

b) $f(X, Y) = (y - X^2)(y - 2X^2 - 1) = Y^2 - 3YX^2 - Y + 2X^4 + X^2$, $g(X, Y) = Y^2 - 3YX^2 + 2X^4 + Y^2X^4$.

Mit der konvexen Funktion ν , wie sie durch die Werte in Abb. 2.41 gegeben ist, ergibt sich das Polynom $h_t(X, Y) = Y^2 - 3YX^2 + 2X^4 + Y^2X^4 - tX^4 - tY + tX^2$.

c) $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$, $g_1(X, Y) = X^2(X^2 + Y^2 - 1)$, $g_2(X, Y) = Y^2(X^2 + Y^2 - 1)$, $g_3(X, Y) = X^2Y^2 - X^2 - Y^2$.

Mit der konvexen Funktion ν , wie sie durch die Werte in Abb. 2.45 gegeben ist, ergibt sich das Polynom $h_t(X, Y) = -X^2Y^2 + X^2 + Y^2 - tX^2 - tY^2 - t$.

a) $f(X, Y) = 8X^3 - X^2 + 4Y^2, \quad g(X, Y) = 4Y^2 - X^2 + 1$

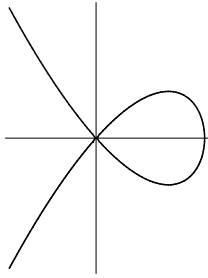


Bild 2.31: $V(f)$

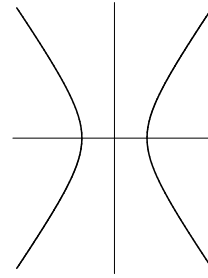


Bild 2.32: $V(g)$

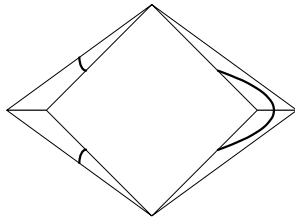


Bild 2.33: Eine Karte von $f(X, Y)$

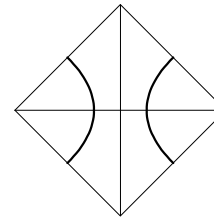


Bild 2.34: Eine Karte von $g(X, Y)$

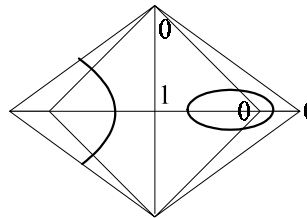


Bild 2.35: Die zusammengesetzte Karte und ν

$$h_t(X, Y) = 8X^3 - X^2 + 4Y^2 + t$$

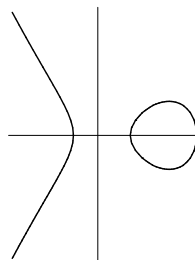


Bild 2.36: $V(h_t)$ für $t = 10^{-3}$

b) $f(X, Y) = (y - X^2)(y - 2X^2 - 1) = Y^2 - 3YX^2 - Y + 2X^4 + X^2,$
 $g(X, Y) = Y^2 - 3YX^2 + 2X^4 + Y^2X^4$

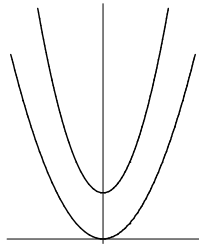


Bild 2.37: $V(f)$

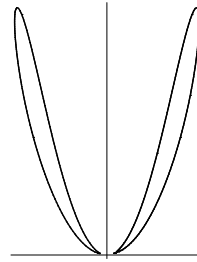


Bild 2.38: $V(g)$

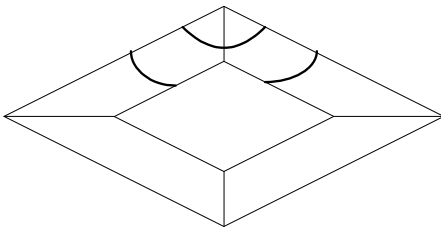


Bild 2.39: Eine Karte von f

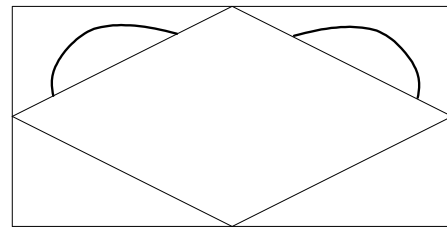


Bild 2.40: Eine Karte von g

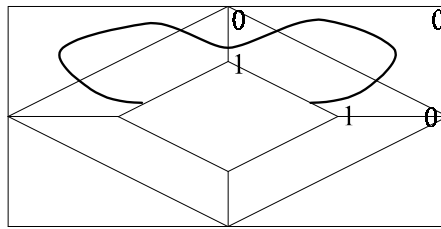


Bild 2.41: Die zusammengesetzte Karte und ν

$$h_t(X, Y) = Y^2 - 3YX^2 + 2X^4 + Y^2X^4 - tY + tX^2$$

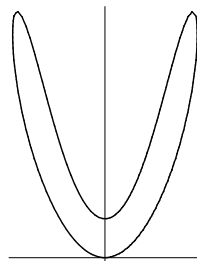


Bild 2.42: $V(h_t)$ für $t = 10^{-1}$

c) $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$, $g_1(X, Y) = X^2(X^2 + Y^2 - 1)$, $g_2(X, Y) = Y^2(X^2 + Y^2 - 1)$, $g_3(X, Y) = X^2Y^2 - X^2 - Y^2$

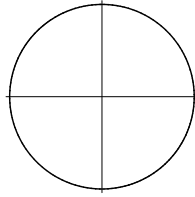


Bild 2.43: $V(f)$

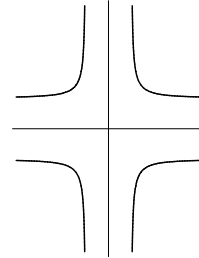


Bild 2.44: $V(g_3)$

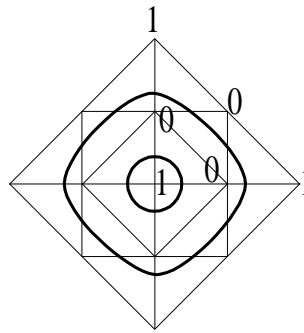


Bild 2.45: Die zusammengesetzte Karte und ν

$$h_t(X, Y) = -X^2Y^2 + X^2 + Y^2 - tX^2 - tY^2 - t$$

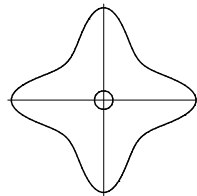


Bild 2.46: $V(h_t)$ für $t = 10^{-1}$

Die Methode von Viro läßt sich unter verschiedenen Blickwinkeln betrachten: In Beispiel a) wurde sie dazu benutzt, um die Singularität einer Kurve zu beseitigen. In Beispiel b) wurden zwei Komponenten einer Kurve zu einer einzigen verbunden (natürlich läßt sich Beispiel b) auch als Aufhebung einer Singularität interpretieren, je nachdem, welche der beiden ursprünglichen Kurven man als Ausgangspunkt nimmt). In Beispiel c) wurde aus einfachen Kurven mit je einer Zusammenhangskomponente eine Kurve mit zwei Komponenten geschaffen. Um diese Technik, aus vielen einfachen eine kompliziertere Kurve zu konstruieren, effektiv ausnutzen zu können, ist es günstig, 'Standardbausteine' zu definieren, aus denen man kombinatorisch Karten zusammensetzen kann.

Das Kapitel schließt damit, den elementarsten und wichtigsten Standardbaustein zu definieren, der dann in Kapitel IV ausschließlich zur Konstruktion der Modelle von K3-Flächen verwendet wird.

2.45 Satz: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Ecken in \mathbb{N}^2 , die mit Vorzeichen versehen seien, für eine Ecke (i, j) sei etwa $\tau_{i,j}$ dessen Vorzeichen. Sei L eine Linie, die die Mitten der Seiten von Δ , deren Enden verschiedene Vorzeichen haben, verbindet (und $L = \emptyset$, falls alle Vorzeichen gleich). L trennt also die positiven von den negativen Ecken.

Sei $\Delta_{\varepsilon,\delta}$ wieder das durch die Spiegelung $S_{\varepsilon,\delta}$ aus Δ entstandene Dreieck, dann setze die Vorzeichen der Ecken auf $\Delta_{\varepsilon,\delta}$ fort durch $\tau_{\varepsilon i,\delta j} := \varepsilon^i \delta^j \tau_{i,j}$. Das Vorzeichen ändert sich also bei einer Spiegelung an der x -Achse ($\varepsilon = -1$) genau dann, wenn die Ecke eine ungerade Strecke von dieser entfernt ist ($j \equiv 1 \pmod{2}$), entsprechendes gilt für die y -Achse. Sei ganz analog $L_{\varepsilon,\delta}$ die Linie, die die Mitten der Seiten von $\Delta_{\varepsilon,\delta}$ mit verschiedenen Vorzeichen verbindet und $L_\star = \bigcup_{\varepsilon,\delta} L_{\varepsilon,\delta}$.

Dann gibt es ein reelles Trinom $f(X, Y)$ mit $\Delta(f) = \Delta$, so daß (Δ_\star, L_\star) eine Karte von f ist.

Beweis:

Sei $f(X, Y)$ das Trinom mit Newton-Polygon Δ und Koeffizienten $+1$ und -1 , entsprechend den Vorzeichen der Ecken von Δ .

Zeige: (Δ_\star, L_\star) ist eine Karte von f , d.h. $\text{Int}(\Delta_{\varepsilon,\delta}, L_{\varepsilon,\delta})$ ist homöomorph zu $(Q_{\varepsilon,\delta}, V_{\varepsilon,\delta}(f))$ für alle $\varepsilon, \delta = \pm 1$.

Es genügt, den Fall $\varepsilon = \delta = 1$ zu betrachten, da $(\Delta_{\varepsilon,\delta}, L_{\varepsilon,\delta})$ identisch (bis auf Spiegelung) mit $(\tilde{\Delta}, \tilde{L})$ ist, wobei $\tilde{\Delta} = \Delta(f(\varepsilon X, \delta Y))$ mit Vorzeichen $\tilde{\tau}(\sigma_i) = \tau \circ S_{\varepsilon,\delta}(\sigma_i)$ und \tilde{L} die zu $\tilde{\Delta}$ gehörende Linie ist.

Sei etwa $f(X, Y) = \tau_{i_1,j_1} X^{\alpha_1} Y^{\beta_1} + \tau_{i_2,j_2} X^{\alpha_2} Y^{\beta_2} + \tau_{i_3,j_3} X^{\alpha_3} Y^{\beta_3}$. Falls $\tau_{i_1,j_1} = \tau_{i_2,j_2} = \tau_{i_3,j_3}$, ist $V_{++}(f) = \emptyset = L$.

Sei also etwa $\tau_{i_1,j_1} = \tau_{i_2,j_2} = 1, \tau_{i_3,j_3} = -1$ (die anderen Fälle sind ganz analog). Wähle einen Vektor $v = (v_1, v_2)$ senkrecht zur Seite von Δ mit gleichen Vorzeichen, z.B. $v = (\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1)$. Für $x_0, y_0 > 0$ sei

$$g_{x_0,y_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 t^{v_1}, y_0 t^{v_2})$$

und $C_{x_0,y_0} = \{g_{x_0,y_0}(t) \mid t > 0\}$. Es ist zu beachten, daß $l(C_{x_0,y_0})$ eine Gerade parallel zu v ist, also sind zwei solcher Geraden entweder gleich oder disjunkt. Andererseits ist $\bigcup_{x_0,y_0 > 0} l(C_{x_0,y_0}) = \mathbb{R}$. Da $l|_{Q_{++}}$ ein Diffeomorphismus von Q_{++} nach \mathbb{R} ist, bedecken

also die Kurven C_{x_0, y_0} ganz Q_{++} , wobei zwei Kurven entweder gleich oder disjunkt sind.

Betrachte nun f entlang einer solchen Kurve:

$$\begin{aligned} f(x_0 t^{v_1}, y_0 t^{v_2}) &= x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} t^{\langle (\alpha_1, \beta_1), (v_1, v_2) \rangle} + x_0^{\alpha_2} y_0^{\beta_2} t^{\langle (\alpha_2, \beta_2), (v_1, v_2) \rangle} + x_0^{\alpha_3} y_0^{\beta_3} t^{\langle (\alpha_3, \beta_3), (v_1, v_2) \rangle} \\ &= (x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} + x_0^{\alpha_2} y_0^{\beta_2}) t^{\langle (\alpha_1, \beta_1), (v_1, v_2) \rangle} - x_0^{\alpha_3} y_0^{\beta_3} t^{\langle (\alpha_3, \beta_3), (v_1, v_2) \rangle} \\ &= c_1 t^p - c_2 t^q \end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2 > 0$ und $p, q \in \mathbb{R}$. Es gibt also für alle $x_0, y_0 > 0$ genau eine Lösung $t > 0$, so daß $f(x_0 t^{v_1}, y_0 t^{v_2}) = 0$, diese hängt zudem stetig von x_0 und y_0 ab. V_{++} hat darum genau eine Zusammenhangskomponente, die jede der Kurven C_{x_0, y_0} genau einmal schneidet und somit in der erfordernten Weise verläuft. \square

2.46 Korollar: a) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(0, m)$. Sei $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine reguläre Triangulierung von Δ , so daß die Ecken der Δ_i jeweils in \mathbb{N}^2 liegen. Sei ferner jeder Ecke (i, j) ein Vorzeichen $\tau_{i,j}$ zugewiesen. Setze nun die Triangulierung auf Δ_\star fort und setze die Vorzeichen der Ecken ebenfalls fort durch $\tau_{\varepsilon i, \delta j} := \varepsilon^i \delta^j \tau_{i,j}$ (vgl. den vorherigen Satz). Sei nun $(L_i)_{\varepsilon, \delta}$ wieder eine Linie, die in $(\Delta_i)_{\varepsilon, \delta}$ die Mittelpunkte der Kanten verbindet, die an den Enden verschiedene Vorzeichen haben, und sei L_\star die Vereinigung aller solcher Linien.

Identifiziere nun jeden Randpunkt von Δ_\star (und jeden entsprechenden von L_\star) mit dem durch die Spiegelung S_{--} hervorgehenden Punkt und nenne das Resultat Δ'_\star bzw. L'_\star (Δ'_\star ist homöomorph zu \mathbb{P}^2).

Behauptung: Dann gibt es ein Polynom $h(X, Y)$ mit $\deg h = m$, so daß $(\Delta'_\star, L'_\star)$ homöomorph zu $(\mathbb{P}^2, \overline{V(h)} \subset \mathbb{P}^2)$ ist.

b) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das Rechteck mit Ecken $(0, 0)$, $(m_1, 0)$, $(0, m_2)$, (m_1, m_2) . Sei $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine reguläre Triangulierung von Δ , so daß die Ecken jeweils in \mathbb{N}^2 liegen. Sei jeder Ecke (i, j) ein Vorzeichen $\tau_{i,j}$ zugewiesen. Setze nun wie in a) die Triangulierung auf Δ_\star fort und definiere L_\star analog.

Identifiziere jeden Randpunkt von Δ_\star (und jeden entsprechenden von L_\star) mit dem gegenüberliegenden, durch die Spiegelung S_{+-} oder S_{-+} hervorgehenden, Punkt, so daß also $(x, m_2) \sim (-x, m_2)$ und $(m_1, y) \sim (m_1, -y)$ gilt.

Behauptung: Das Resultat $(\Delta''_\star, L''_\star)$ ist homöomorph zu $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \overline{V(h)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ für ein Polynom $h(X, Y)$ mit $\deg_X h = m_1, \deg_Y h = m_2$.

Beweis: a) Nach dem vorangegangenen Satz ist jedes $((\Delta_i)_\star, (L_i)_\star)$ eine Karte eines Trinoms vom Grad $\leq m$, wobei mindestens ein Trinom Grad m hat. Da es nach Voraussetzung eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ gibt, ist nach dem Patchwork-Satz (Δ_\star, L_\star) ebenfalls Karte eines Polynoms vom Grad m . $(\Delta'_\star, L'_\star)$ ist das Ergebnis der Rekonstruktionsmethode gemäß Proposition 2.35.

b) ganz analog. \square

2.47 Definition: Eine mit dieser Methode gewonnene Kurve wird *T-Kurve* genannt.

Beispiele: In ausreichender Anzahl im Anhang.

Noch eine **historische Bemerkung:** Die Klassifikation nichtsingulärer projektiver algebraischer Kurven ist ein so wichtiges Problem, daß Hilbert es 1900 (als Teil des 16. Problems) in seine berühmte Liste ungelöster Fragen aufgenommen hat:

(Göttinger Nachrichten 1900, S.253-297)

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Curve n -ter Ordnung haben kann, ist von HARNACK bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Curvenzüge in der Ebene.

Das Problem der Klassifikation von Kurven zu einem gegebenen Grad wird stets von zwei Seiten angegangen: Einerseits versucht man, Restriktionen für die Kurven zu finden, wie etwa Restriktionen zur Anzahl der Zusammenhangskomponenten, zu Art und Lage der Komponenten etc. . Auf der anderen Seite ist man bestrebt, möglichst viele Kurven zu konstruieren, solange bis Konvergenz der beiden Verfahren eintritt, d.h. jede 'erlaubte' Kurve auch konstruiert werden kann. In diesem Fall ist die Klassifikation vollbracht.

Die klassische Technik zur Konstruktion nichtsingulärer Kurven besteht darin, singuläre Kurven ein wenig zu stören, d.h. die Koeffizienten des Polynoms leicht zu verändern, so daß die Singularität verschwindet. Je nach Art der Störung entstehen dabei sehr vielfältige Kurven.

Von Hilbert eingeführt, konnte mit ihrer Hilfe D.A. Gudkov 1969 die Klassifikation der reellen projektiven nichtsingulären Kurven vom Grad 6 beenden (siehe auch Kapitel IV). Allerdings sind Gudkovs Konstruktionen zum Teil äußerst kompliziert. Für Kurven vom Grad > 6 sind die Schwierigkeiten schon zu groß. Mit der Viro-Methode lassen sich ebenfalls alle Isotopie-Typen konstruieren (siehe [ViGlue]), fast alle sogar mit der eben beschriebenen 'elementaren' Variante (siehe Kapitel IV und Anhang). Insbesondere eine Kurve mit dem Schema $\langle 5 \text{ II } 1 \langle 5 \rangle \rangle$, die Hilbert, und zunächst auch Gudkov, für unmöglich gehalten hatte, läßt sich so verhältnismäßig einfach konstruieren. Bei der Konstruktion von Kurven vom Grad 7 (Klassifikation inzwischen vollendet) und 8 findet ausschließlich Viro's Methode Verwendung.

III Kurven und Flächen

Die folgenden drei Abschnitte stellen einen kurzen Überblick über die benötigten Resultate zweier wichtiger Hilfsmittel zur Untersuchung von topologischen Räumen dar: der Fundamentalgruppe und Überlagerungen einerseits (erste zwei Abschnitte; es wird gezeigt, daß jene in gewisser Weise äquivalente Konzepte sind), Homologie- und Kohomologiegruppen andererseits (dritter Abschnitt). Diese Resultate werden in der einschlägigen Literatur hergeleitet. Detaillierte Informationen über die Fundamentalgruppe findet man etwa bei [Hatch], über die (Ko-)Homologietheorie bei [DFN III].

Im letzten Abschnitt werden diese Methoden zur Beschreibung von K3-Flächen, insbesondere reeller K3-Flächen, angewendet.

3.1 Die Fundamentalgruppe

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege in X mit $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x_0$ ($i \in \{1, 2\}$), dann ist

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

ebenfalls ein solcher Weg, welcher γ_1 und γ_2 nacheinander durchläuft.

Bezeichne mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen der Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, wobei die Homotopien den Start- und Endpunkt x_0 festhalten. Dann ist durch $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ eine Verknüpfung wohldefiniert, durch die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe, der sogenannten *Fundamentalgruppe* von X in x_0 , wird.

Wenn X wegzusammenhängend ist, hängt $\pi_1(X, x_0)$ nicht von x_0 ab, und es wird schlicht $\pi_1(X)$ geschrieben.

Bemerkung: Die Fundamentalgruppe ist eine der wichtigsten Invarianten eines topologischen Raumes. Ihre Berechnung im konkreten Fall ist allerdings oft schwierig und erfordert weitergehende Hilfsmittel.

Beispiele:

- a) Sei X homotopieäquivalent zu $x_0 \in X$, dann ist $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0) = \{e\}$. Durch das 'Zusammenziehen' des Raumes X auf x_0 werden auch alle Wege in X auf den konstanten Weg in x_0 zusammengezogen.

- b) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die Fundamentalgruppe 'zählt' die Umläufe um S^1 : positiv in der einen Richtung, negativ in der anderen.
- c) $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dies wird klar aus dem Satz 3.52 des folgenden Abschnitts und der Tatsache, daß S^2 die universelle (zweifache) Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ist.

3.2 Überlagerungen

3.48 Definition: Sei X ein topologischer Raum. Das Paar (Y, p) heißt *Überlagerung* von X , falls $p : Y \rightarrow X$ eine stetige, surjektive Abbildung ist, so daß jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt mit

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

wobei $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist für alle $i \in I$ ⁹. Falls klar ist, mit welcher Abbildung Y zu einer Überlagerung von X wird, läßt man diese oft weg und sagt dann: Y ist eine Überlagerung von X .

Ein Homöomorphismus $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ heißt *Isomorphismus* (von Überlagerungen), falls (Y_1, p_1) und (Y_2, p_2) Überlagerungen von X sind und $p_1 = p_2 \circ f$ gilt.

Beispiele:

- a) $X = S^1$.
- $Y_1 = S^1 \amalg S^1 \amalg \dots \amalg S^1$ (n -fache Summe) ist eine offensichtliche (sogenannte *triviale*) Überlagerung von X mit $p^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \sqcup U_n$ für offene $U \subset S^1$.
 - $Y_2 = \mathbb{R}$ ist eine Überlagerung von X vermittelt $p(t) = e^{i2\pi t}$; $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ für alle $U \subset \mathbb{R}$ offen und klein genug.
 - $Y_3 = S^1$ ist eine Überlagerung von X vermittelt $p(e^{i2\pi t}) = e^{i2\pi(2t)}$. Dabei ist $p^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$, falls U offen und klein.
- b) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Dann ist $Y = S^2$ Überlagerung von X vermittelt $p(x, y, z) = (x : y : z)$. Dabei ist $p^{-1}(U) = U \sqcup (-U)$ (siehe auch Kapitel I, Prop: Kugel).

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß alle Räume wegzusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind.

3.49 Proposition: Sei (Y, p) eine Überlagerung von X . Die Anzahl der Punkte in $p^{-1}(x)$ hängt nicht von der Wahl von $x \in X$ ab. Ist $|p^{-1}(x)| = n$, so heißt Y *n -fache Überlagerung* von X .

⁹ \bigsqcup bezeichne die disjunkte Vereinigung.

3.50 Satz: (Liftungssatz) Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $x \in X$. Für jeden Weg γ in X mit $\gamma(0) = x$ und jedes $y \in p^{-1}(x)$ gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\gamma}$ in Y mit $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}(0) = y$.

3.51 Definition: Eine Überlagerung Y von X heißt *universell*, falls $\pi_1(Y) = \{e\}$, d.h. falls Y einfach zusammenhängend ist.

Es gilt folgende wichtige Beziehung zwischen den Überlagerungen von X und der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$:

3.52 Satz: Sei X eine wegzusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit:

- (i) Jede Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ induziert einen Monomorphismus $p^* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ durch $p^*([\gamma]) = [p(\gamma)]$. $H := p^*(\pi_1(Y))$ ist somit eine Untergruppe von $\pi_1(X)$ und es gilt $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(X)/H|$.
Sind (Y_1, p_1) und (Y_2, p_2) isomorphe Überlagerungen von X , so sind die assoziierten Untergruppen konjugiert.
- (ii) Zu jeder Untergruppe H von $\pi_1(X)$ gibt es eine Überlagerung (Y, p) von X mit $p^*(\pi_1(Y)) = H$. Y ist dabei eindeutig bis auf Isomorphie.

3.53 Korollar: Jede zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit X hat eine (bis auf Isomorphie) eindeutige universelle Überlagerung.

Beweis: Die Konjugiertenklasse der trivialen Untergruppe der $\pi_1(X)$ enthält nur sich selbst. Die mit ihr korrespondierende universelle Überlagerung existiert somit und ist eindeutig. \square

Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß die universelle Überlagerung von X jede weitere Überlagerung von X selbst wieder überlagert. Die Bezeichnungsweise ist somit gerechtfertigt.

3.54 Korollar: Sei X eine wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit. Die doppelten Überlagerungen von X sind (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei Y eine doppelte Überlagerung von X . Dann korrespondiert Y mit einer Untergruppe von $\pi_1(X)$ vom Index 2. Diese ist eindeutig und somit auch Y . \square

3.55 Definition: Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $n \in \mathbb{N}$. (Y, p) heißt *n-fache Überlagerung* von X mit *Verzweigung* in $A \subset X$, falls $p : Y \rightarrow X$ stetig und surjektiv ist, $Y \setminus p^{-1}(A)$ n -fache Überlagerung von $X \setminus A$ und $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ nicht injektiv ist für jede Umgebung U von x für jedes $x \in A$.

Beispiele:

- a) $X = D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, $A = \partial D^2 = S^1$. Dann ist $Y = S^2$ mit $p(x, y, z) = (x, y)$ doppelte Überlagerung von D^2 mit Verzweigung in S^1 .

- b) Sei $X = \mathbb{C}^n$ und $f(Z_1, \dots, Z_n)$ ein komplexes Polynom. Die Gleichung $w^k + f(z_1, \dots, z_n) = 0$ bestimmt eine Hyperfläche $Y \subset \mathbb{C}^{n+1}$, die mit der Projektionsabbildung $p : Y \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(w, z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$ eine k -fache Überlagerung des \mathbb{C}^n mit Verzweigung in $V(f)$ bildet. (Man beachte, daß $\mathbb{C}^n \setminus V(f)$ zusammenhängend ist, da $V(f)$ (reelle) Dimension $\leq n - 2$ hat.)
- c) Sei $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, der komplexe projektive Raum. Für ein homogenes komplexes Polynom $f(Z_0, \dots, Z_n)$ vom Grad m ist die durch $w^m + f(z_0, \dots, z_n) = 0$ definierte Fläche $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ eine m -fache Überlagerung des $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ mit Verzweigung in $V(f)$ mit der Projektion $p : (w : z_0 : \dots : z_n) \mapsto (z_0 : \dots : z_n)$. Somit ist $Y' := Y \setminus p^{-1}(V(f))$ m -fache Überlagerung von $X' := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \setminus V(f)$. In der Tat läßt sich zeigen, daß $\pi_1(Y') \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist; somit ist Y' sogar die universelle Überlagerung von X' .

3.3 Homologie und Kohomologie

Die (Ko-)Homologie-Gruppen sind eine weitere Invariante eines topologischen Raumes. Sie können auf verschiedene Weisen definiert werden, aber sofern verschiedene Versionen auf einem Raum definierbar sind, so stimmen sie dort überein. Wir werden uns hier wegen ihrer breiten Anwendbarkeit auf die singuläre (Ko-)Homologie beschränken. Eine ausführliche Darstellung verschiedener (Ko-)Homologien und ihrer Beziehungen zueinander findet sich bei [DFN III].

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren den *Standard- k -Simplex*

$$\Delta^k = \{(t_0, \dots, t_k) \mid \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$$

mit Ecken $\sigma_0, \dots, \sigma_k$. Eine Orientierung auf Δ^k entspricht der Wahl einer Reihenfolge für die Ecken. Wir schreiben diese in der Form $[\sigma_0 \dots \sigma_k]$ und nennen $\Delta^k = [\sigma_0 \dots \sigma_k]$ einen *orientierten Standard- k -Simplex*.

Der Rand eines k -Simplexes $[\sigma_0 \dots \sigma_k]$ besteht aus den $(k-1)$ -Simplizes $\Delta_{(i)}^{k-1} = [\sigma_0 \dots \widehat{\sigma}_i \dots \sigma_k]$. Wir definieren für $k > 0$ die Randabbildung

$$\partial \Delta^k = \partial[\sigma_0 \dots \sigma_k] := \sum_{i=1}^k (-1)^i [\sigma_0 \dots \widehat{\sigma}_i \dots \sigma_k] = \sum_{i=1}^k (-1)^i \Delta_{(i)}^{k-1},$$

wobei die beiden rechten Ausdrücke als formale Linearkombinationen zu verstehen sind. Für $k = 0$ setzen wir $\partial \Delta^0 = 0$.

Setzt man ∂ linear auf formale Summen fort, so erhalten wir folgende entscheidende Eigenschaft:

3.56 Proposition: Für jeden orientierten k -Simplex gilt

$$\partial \partial[\sigma_0 \dots \sigma_k] = 0.$$

Beweis:

$$\partial\partial[\sigma_0 \dots \sigma_k] = \partial\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \Delta_{(i)}^{k-1}\right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial\Delta_{(i)}^{k-1} = 0,$$

da in der letzten Summe jedes $\Delta_{(ij)}^{k-1} = \Delta_{(ji)}^{k-1} = [\sigma_0 \dots \widehat{\sigma}_i \dots \widehat{\sigma}_j \dots \sigma_k]$ zweimal vorkommt, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. \square

Sei nun X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Eine k -Simplex in X ist eine stetige Abbildung

$$f : \Delta^k \rightarrow X$$

von einem orientierten Standard- k -Simplex $[\sigma_0 \dots \sigma_k]$ nach X . Wir schreiben dafür (Δ^k, f) .

Eine k -Kette ist eine formale endliche Linearkombination

$$c_k = \sum_i g_i (\Delta_i^k, f_i),$$

wo $g_i \in G$ und $f_i : \Delta_i^k \rightarrow X$ k -Simplexes in X sind. Bezeichne mit

$$C_k(X, G) := \{c_k \mid c_k = \sum_i g_i (\Delta_i^k, f_i) \text{ ist } k\text{-Kette}\}$$

die Menge der k -Ketten in X mit Koeffizienten in G . Der Rand eines k -Simplexes in X wird auf natürliche Weise definiert:

$$\partial(\Delta^k, f) := \sum_i (-1)^i (\Delta_{(i)}^{k-1}, f|_{\Delta_{(i)}^{k-1}}).$$

Indem wir diese Abbildung linear auf k -Ketten forsetzen, erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Randabbildung

$$\partial : C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G).$$

Eine k -Kette c_k mit $\partial c_k = 0$ heißt k -Zykel. Es gilt weiterhin $\partial\partial = 0$; mit der Bezeichnung ∂^k für $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ erhalten wir somit den folgenden *Kettenkomplex*

$$\dots \xrightarrow{\partial^{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial^{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial^k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial^{k-1}} \dots$$

mit der Eigenschaft $\text{Im } \partial^{k+1} \subset \text{Ker } \partial^k$. Die k -te *Homologiegruppe* $H_k(X, G)$ ist definiert als

$$H_k(X, G) := \text{Ker } \partial^k / \text{Im } \partial^{k+1}.$$

Die *Kohomologie* bezieht sich auf die entsprechenden dualen Begriffe: Eine k -Kokette c^k ist eine Linearform auf $C_k(X, G)$, deren Gesamtheit wir mit $C^k(X, G)$ bezeichnen. Wir erhalten den zu ∂ dualen Operator d und entsprechend einen Koketten-Komplex

$$\dots \xleftarrow{d_{k+2}} C_{k+1} \xleftarrow{d_{k+1}} C_k \xleftarrow{d_k} C_{k-1} \xleftarrow{d_{k-1}} \dots$$

Wir definieren die k -te Kohomologiegruppe $H^k(X, G)$ als

$$H^k(X, G) := \text{Ker } d_{k+1} / \text{Im } d_k.$$

Diese ist wohldefiniert, weil $d_{k+1} \circ d_k = 0$ für alle $k \geq 0$, und sie ist der Dualraum von $H_k(X, G)$. Falls beide endlich erzeugt sind, ist daher insbesondere ihre Dimension gleich.

Es folgen einige Eigenschaften der (Ko-)Homologiegruppen für einen topologischen Raum X .

3.57 Proposition:

$$H_0(X, G) \cong H^0(X, G) \cong \bigoplus_{i=1}^n G,$$

für jede Gruppe G , wo n die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X bezeichnet.

3.58 Proposition: Ist $X = X_1 \amalg \dots \amalg X_n$, so gilt für alle k

$$H^k(X, G) = \bigoplus_{i=1}^n H^k(X_i, G)$$

und entsprechend auch für die Homologiegruppen $H_k(X, G)$.

3.59 Proposition: Sei $\varphi : Y \rightarrow X$ eine stetige Funktion zwischen zwei topologischen Räumen, dann induziert φ die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \varphi_* : H_k(Y, G) &\rightarrow H_k(X, G) \\ \varphi^* : H^k(X, G) &\rightarrow H^k(Y, G) \end{aligned}$$

mit $\varphi_*(\sum_i g_i(\Delta_i^k, f_i)) = \sum_i g_i(\Delta_i^k, \varphi \circ f_i)$ und $(\varphi^*(c^k))(c'_k) = c^k(\varphi_*(c'_k))$.

Ein Homöomorphismus $Y \rightarrow X$ induziert somit Isomorphismen zwischen $H_k(Y, G)$ und $H_k(X, G)$ sowie zwischen $H^k(Y, G)$ und $H^k(X, G)$. Es gilt sogar stärker:

3.60 Proposition: Seien $\varphi_0, \varphi_1 : Y \rightarrow X$ homotope stetige Abbildungen, dann gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$ und $(\varphi_0)^* = (\varphi_1)^*$.

Daraus folgt, daß die (Ko-)Homologiegruppen von homotopieäquivalenten Räumen isomorph sind.

Die Elemente aus $H_1(X, \mathbb{Z})$ bestehen aus Summen geschlossener Schleifen, die als gleich angesehen werden, wenn sie zusammen den Rand einer Fläche bilden, also insbesondere homotop sind. Es ist daher nicht verwunderlich, daß folgender enger Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und der ersten Homologiegruppe besteht:

3.61 Satz: Sei X ein topologischer Raum. Es gilt:

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1, \pi_1],$$

wobei $[\pi_1, \pi_1]$ die Kommutatorgruppe von $\pi_1(X)$ bezeichnet.

3.62 Definition: Sei X ein topologischer Raum und \mathbb{K} ein Körper. Dann ist $H_k(X, \mathbb{K})$ ein Vektorraum über \mathbb{K} und wir definieren die k -te Betti-Zahl über \mathbb{K}

$$B_k(\mathbb{K}) = \dim H_k(X, \mathbb{K}).$$

Wenn von der Betti-Zahl B_k die Rede ist, so ist damit $B_k(\mathbb{Q})$ gemeint.

3.63 Proposition: Die Summe

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k B_k(\mathbb{K})$$

ist unabhängig von der Wahl des Körpers \mathbb{K} und wird *Eulercharakteristik* von X genannt.

3.64 Proposition: Sei X eine reelle 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die sich triangulieren läßt. Dann stimmt die obige Definition mit der historisch ursprünglichen Definition der Eulercharakteristik überein, nämlich

$$\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

wo α_0 die Anzahl der Ecken, α_1 die Anzahl der Kanten und α_2 die Anzahl der Dreiecke in einer beliebigen Triangulation von X ist.

3.65 Korollar: Für einen g -Torus T_g gilt

$$\chi(T_g) = 2 - 2g.$$

Insbesondere beschreiben für verschiedene g 's die entsprechenden g -Tori wirklich verschiedene Flächen.

Beweis: Sei T_g dargestellt als $4g$ -Gon mit Identifikation bestimmter Kanten, wie in Kapitel I (S. 12) beschrieben. Durch die Verbindungslinien des Mittelpunktes zu den Ecken wird eine Triangulation bestimmt. Diese Triangulation hat offensichtlich $4g$ Dreiecke, es gibt $4g$ innere Kanten und $2g$ äußere (wegen der Identifikation). Alle äußeren Eckpunkte werden mit einem einzigen Punkt identifiziert, die Gesamtzahl der Punkte ist also 2. Die Eulercharakteristik von T_g ist somit $2 - 6g + 4g = 2 - 2g$. \square

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind 'schöne' topologische Räume, es ist daher nicht verwunderlich, daß hierfür auch 'schöne' Beziehungen zwischen den (Ko-)Homologiegruppen bestehen, die im allgemeinen nicht gelten. So lassen sich etwa Differentialformen auf X als lineare Abbildungen auf den Homologiegruppen ansehen, da man sie, wie schon früher erwähnt, über Zykel integrieren kann. Diese Beziehung zwischen Differentialformen und Kohomologiegruppen gibt Anlaß zu einer Zerlegung

$$H^k(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{Z}),$$

die wir hier aber nicht weiter ausführen werden. Die Dimension des Raumes $H^{p,q}(X, \mathbb{Z})$ wird mit $h^{p,q}$ bezeichnet, wir werden für K3-Flächen einen gewissen Nutzen aus der Zahl $h^{0,2}$ ziehen.

Sind die Homologie-Gruppen bekannt, so bringen die Kohomologie-Gruppen natürlich keine neuen Erkenntnisse, und umgekehrt. Aus dem oben genannten Grund werden wir hauptsächlich die Kohomologie-Gruppen über Ringen, wie \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder \mathbb{Q} , betrachten. Zwischen den Kohomologie- und den Homologiegruppen (mit ganzen Zahlen als Koeffizienten) herrscht zudem folgende wichtige Beziehung:

3.66 Satz: (Poincaré-Dualität) Sei X eine reelle kompakte orientierbare n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $k = 0, \dots, n$ gilt

$$H_k(X, \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(X, \mathbb{Z}).$$

Insbesondere gilt für die Betti-Zahlen $B_k = B_{n-k}$.

3.4 K3-Flächen

K3-Flächen¹⁰ sind wohl der am besten untersuchte Typ von algebraischen Flächen. In der Tat erweisen sie sich als bereitwillige Versuchsobjekte und liefern viele schöne Resultate.

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine genaue Klassifikation der reellen K3-Flächen zu erhalten. Dafür werden zunächst topologische Restriktionen formuliert, die aus der wechselseitigen Beziehung zwischen komplexen K3-Flächen über \mathbb{R} und ihren reellen Punkten herrschen. Anschließend wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe K3-Flächen konstruiert werden können.

Die Konstruktion reeller K3-Flächen mit dieser Methode erfolgt wegen des Zusammenhangs zur Viro-Methode erst im nächsten Kapitel.

3.67 Definition: Eine *K3-Fläche* ist eine kompakte komplexe algebraische Fläche X , die einfach zusammenhängend ist und für die $K_X = 0$ gilt.

Bemerkung: Statt der Forderung, daß X einfach zusammenhängend sein soll, kann man auch etwas schwächer fordern, daß $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Da $H^1(X, \mathbb{Z})$ isomorph zu einer Faktorgruppe von $\pi_1(X)$ ist, ist klar, daß für eine K3-Fläche $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ gilt. Andererseits läßt sich zeigen, daß aus $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ und $K_X = 0$ folgt, daß X einfach zusammenhängend ist. Die obige Definition stellt somit keine Einschränkung dar.

3.68 Proposition: Sei X eine K3-Fläche. Es gilt:

$$H^0(X, \mathbb{Z}) \cong H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H^3(X, \mathbb{Z}) = 0,$$

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22},$$

$$\chi(X) = 24,$$

$$h^{0,2} = 1.$$

¹⁰Die Bezeichnung leitet sich von den Mathematikern Kummer, Kähler und Kodaira ab.

Beweis: Die Ergebnisse für $H^0(X, \mathbb{Z})$, $H^1(X, \mathbb{Z})$, $H^3(X, \mathbb{Z})$ und $H^4(X, \mathbb{Z})$ folgen aus der Definition und der Poincaré-Dualität. Für $H^2(X, \mathbb{Z})$ und $h^{0,2}$ siehe [ShaSurf]. $\chi(X) = 24$ folgt dann aus $\chi(X) = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Z})$. \square

$H^2(X, \mathbb{Z})$ erweist sich als entscheidende Struktur zur Untersuchung von K3-Flächen. Davon ausgehend läßt sich ein Modulraum für K3-Flächen konstruieren, also ein Raum, in dem jeder Punkt eine K3-Fläche repräsentiert. Dieser Modulraum ist selbst wieder eine algebraische Varietät, seine Struktur führt zu folgendem starken Resultat (siehe etwa [ShaSurf] oder [Pls]):

3.69 Satz: Alle komplexen K3-Flächen sind zueinander diffeomorph.

Bezeichnung: Bezeichne $X_{\mathbb{R}}$ eine reelle algebraische Varietät, also definiert durch reelle Polynome. Deren komplexe Nullstellen bilden eine komplexe algebraische Varietät über \mathbb{R} , die wir mit $X_{\mathbb{C}}$ bezeichnen. Ist $X_{\mathbb{C}}$ eine K3-Fläche, so nennen wir $X_{\mathbb{R}}$ *reelle K3-Fläche*.

Die komplexe Konjugation ist eine antiholomorphe Involution auf $X_{\mathbb{C}}$, deren Fixpunktmenge gerade $X_{\mathbb{R}}$ ist. Wir bezeichnen sie nachfolgend mit S . S induziert einen involutorischen Homomorphismus $H^i(X_{\mathbb{C}}, R) \rightarrow H^i(X_{\mathbb{C}}, R)$ für jeden Ring R , den wir ebenfalls mit S bezeichnen. Wir schreiben $S(H^i(X_{\mathbb{C}}, R))$ für sein Bild $\text{Im}(S)$ und $\text{Fix}_S(H^i(X_{\mathbb{C}}, R))$ für seine Fixpunktmenge.

3.70 Definition: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine komplexe algebraische Varietät über \mathbb{R} . $X_{\mathbb{C}}$ heißt *Galois-maximal*, falls

$$\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_j \left(\dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2 \dim(1 + S)H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right).$$

Bemerkung: Die obige Formel ist für jede algebraische Varietät über \mathbb{R} richtig, wenn man das Gleichheitszeichen durch ' \leq ' ersetzt. Die resultierende Ungleichung ist unter verschiedenen Namen, wie etwa 'Smith', 'Smith-Thom' oder 'Thom-Krasnov', bekannt.

3.71 Proposition: Eine K3-Fläche über \mathbb{R} mit $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ ist Galois-maximal.

Ein Beweis dieser Aussage findet sich bei [Kras].

3.72 Proposition: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine glatte projektive Varietät über \mathbb{R} , dann gilt:

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \sum_i (-1)^i (2b_i - B_i),$$

wo $b_i = \dim \text{Fix}_S(H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$.

Beweis: Sei $Y := X_{\mathbb{C}}/\sim$, der topologische Quotient mit $x \sim x' \Leftrightarrow S(x) = x'$, und $p: X_{\mathbb{C}} \rightarrow Y$ die kanonische Projektion. Es läßt sich zeigen, daß

$$\chi(X_{\mathbb{C}}) = 2\chi(Y) - \chi(X_{\mathbb{R}}).$$

(Dazu trianguliere man $X_{\mathbb{C}}$ als Erweiterung einer Triangulation auf $X_{\mathbb{R}}$.)
 p induziert einen injektiven Homöomorphismus $p^* : H^i(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$. Ein $\alpha \in H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ ist genau dann Bild eines β in $H^i(Y, \mathbb{Z})$, wenn $\alpha = \alpha \circ S$. Daher ist $H^i(Y, \mathbb{Q}) \cong \text{Im}(p^*) = \text{Fix}_S(H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$. Aus

$$\chi(X_{\mathbb{C}}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = 2 \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, \mathbb{Q}) - \chi(X_{\mathbb{R}})$$

folgt damit

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \sum_i (-1)^i (2 \dim \text{Fix}_S(H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) - B_i).$$

□

3.73 Proposition: Für i ungerade gilt $2b_i = B_i$. Die obige Formel vereinfacht sich somit zu

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \sum_i (2b_{2i} - B_{2i}).$$

Beweis: Siehe [Sil].

□

3.74 Proposition: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine K3-Fläche über \mathbb{R} . Es gilt:

- (i) $\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 24 - 2\lambda, \quad \lambda = \dim(1 + S)H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$
(ii) $\chi(X_{\mathbb{R}}) = 2b - 20, \quad b = \dim \text{Fix}_S(H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$

Beweis: (i) Nach Proposition 3.71 haben wir

$$\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_j \left(\dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2 \dim(1 + S)H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right).$$

Die Kohomologie-Gruppen von $X_{\mathbb{C}}$ sind torsionsfrei, somit $\dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) = \dim H^j(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für alle j . Mit (3.68) ergibt sich:

$$\begin{aligned} H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H^3(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \\ &\implies \dim(1 + S)H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \dim(1 + S)H^3(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong H^4(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \implies S \text{ operiert trivial} \\ &\implies \text{Fix}_S H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Fix}_S H^4(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{22}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 24 - 2 \dim(1 + S)H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(ii) Nach Proposition 3.72 ist

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \sum_i (2b_i - B_i).$$

Nach (3.68) gilt $B_1 = B_3 = 0$, $B_0 = B_4 = 1$ und $B_2 = 22$. Daraus ergibt sich $b_1 = b_3 = 0$ und

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = 2b_0 - 1 + 2b_2 - 22 + 2b_4 - 1 = 2b_2 - 20,$$

da wie im Beweis zu i) gesehen $b_0 = b_4 = 1$ ist. \square

3.75 Korollar:

$$\begin{aligned} \dim H^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \frac{2 + b - \lambda}{2} \\ \dim H^1(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= 22 - \lambda - b \end{aligned}$$

Beweis: Nach der Poincaré-Dualität ist $H^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^2(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und somit

$$4 \dim H^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + \chi(X_{\mathbb{R}}) = 4 + 2b - 2\lambda$$

sowie

$$2 \dim H^1(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - \chi(X_{\mathbb{R}}) = 44 - 2\lambda - 2b.$$

\square

3.76 Korollar: Eine reelle K3-Fläche hat maximal 12 Zusammenhangskomponenten.

Beweis: Sei X eine K3-Fläche über \mathbb{R} , dann folgt aus den obigen Gleichungen $b \leq 22$ und $\dim H^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \frac{2+b-\lambda}{2} \leq 12$. \square

3.77 Proposition: Für eine algebraische Galois-maximale Fläche $X_{\mathbb{C}}$ über \mathbb{R} gilt

$$\sum_i \lambda_i \equiv b_2 \pmod{2},$$

wo $\lambda_i := \dim (1 + S)H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Beweis: Schreibe $h^*(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für $\sum_i \dim H^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Es gilt

$$h^*(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + \chi(X_{\mathbb{R}}) = 4 \dim H^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Andererseits haben wir nach den Propositionen 3.71 und 3.73 und der Poincaré-Dualität

$$\begin{aligned} h^*(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + \chi(X_{\mathbb{R}}) &= \sum_i (B_i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2\lambda_i) + \sum_i (2b_{2i} - B_{2i}) \\ &= -2 \sum_i \lambda_i + 2 + 2B_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + B_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + 2 + 2b_2 - B_2. \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Eulercharakteristik von der Wahl des zugrunde liegenden Körpers gilt $-2B_1 + B_2 = -2B_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + B_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und damit $2(B_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - B_1) = B_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - B_2$. Alles eingesetzt ergibt sich

$$2 \sum_i \lambda_i \equiv 4B_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - 2B_1 + 2b_2 \pmod{4}.$$

Da B_1 gerade ist ($B_1 = h^{0,1} + h^{1,0}$ und $h^{1,0} = h^{0,1}$ für komplexe Flächen¹¹), folgt die Behauptung. \square

3.78 Definition: Eine algebraische Galois-maximale Fläche über \mathbb{R} heißt (M-r)-Fläche, falls $\sum_i \lambda_i = r$.

3.79 Proposition: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine algebraische Galois-maximale Fläche über \mathbb{R} .

(i) Falls $X_{\mathbb{C}}$ eine M-Fläche ist, so gilt

$$b_2 \equiv 2h^{0,2} \pmod{8}.$$

(ii) Falls $X_{\mathbb{C}}$ eine (M-1)-Fläche ist, so gilt

$$b_2 \equiv 2h^{0,2} \pm 1 \pmod{8}.$$

(iii) Falls

$$b_2 \equiv 2h^{0,2} \pm 3 \pmod{8},$$

so ist $X_{\mathbb{C}}$ höchstens eine (M-3)-Fläche (d.h. $\sum_i \lambda_i \geq 3$).

Nutzt man die hier angegebenen Restriktionen für eine K3-Fläche über \mathbb{R} aus, (es gilt $h^{0,2} = 1$; ferner ist zu beachten, daß $\lambda_i = 0$ für $i \neq 2$, somit $\sum_i \lambda_i = \lambda$), so erhält man die in Tabelle 3.1 angegebenen möglichen Werte für $\lambda = \lambda_2$ und $b = b_2$.

Die folgenden Resultate gehen auf Kharlamov zurück: [Sil],[Pls]

3.80 Proposition: Wenn $X_{\mathbb{C}}$ eine K3-Fläche über \mathbb{R} ist, so ist $X_{\mathbb{R}}$ orientierbar.

3.81 Proposition: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine K3-Fläche über \mathbb{R} mit $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Dann ist $X_{\mathbb{R}} = T_1 \amalg T_1$ oder andernfalls hat $X_{\mathbb{R}}$ maximal eine Zusammenhangskomponente mit Eulercharakteristik ≤ 0 .

3.82 Korollar: Sei $X_{\mathbb{C}}$ eine K3-Fläche über \mathbb{R} mit $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Dann ist $X_{\mathbb{R}}$ eindeutig bestimmt (bis auf Homöomorphie) durch die Werte (b, λ) , es sei denn $(b, \lambda) = (10, 8)$. In diesem Fall ist $X_{\mathbb{R}} = T_1 \amalg T_1$ oder $X_{\mathbb{R}} = T_0 \amalg T_2 = S^2 \amalg T_2$ möglich.

Beweis: Wir nehmen an, daß $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ und $X_{\mathbb{R}} \neq T_1 \amalg T_1$. Nach dem Klassifikationssatz für kompakte orientierbare 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeiten (siehe 1.5) besteht $X_{\mathbb{R}}$ aus einer endlichen Anzahl an Tori T_g . Mit $\chi(T_g) = 2 - 2g \leq 0$ für

¹¹Nach einem Ergebnis der Hodge-Theorie.

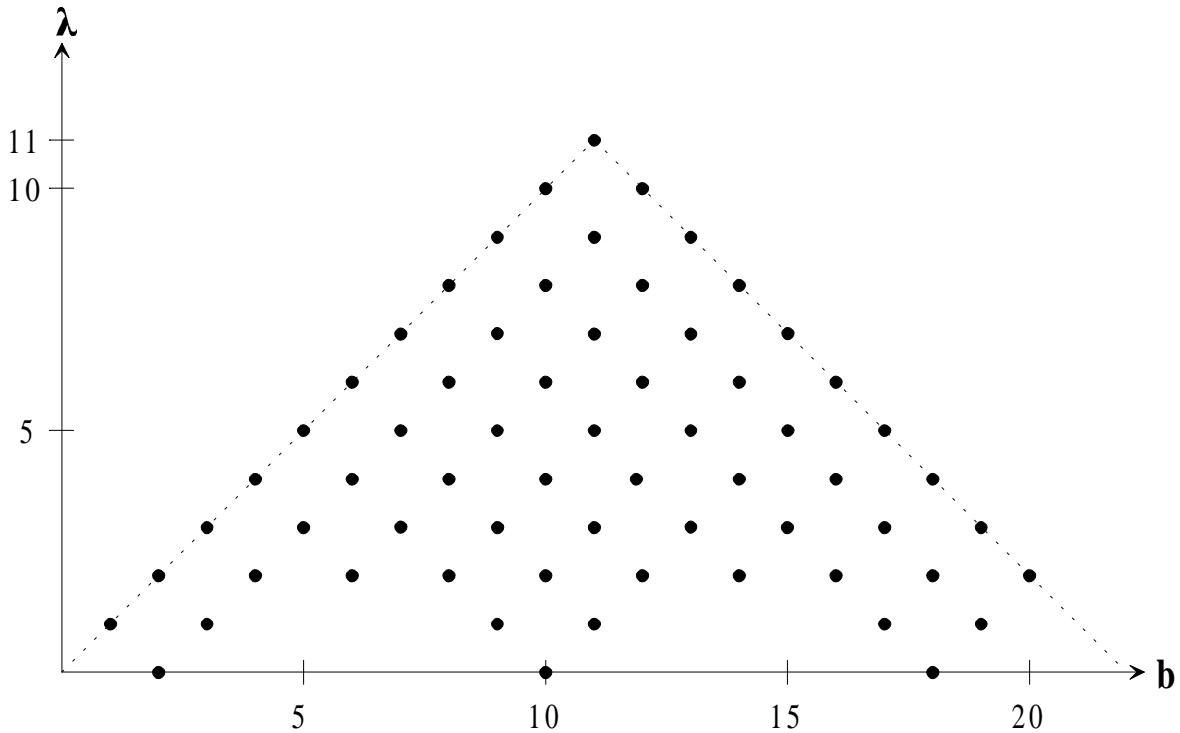


Tabelle 3.1: Mögliche Werte von (b, λ) für eine K3-Fläche über \mathbb{R}

$g \geq 1$ und der vorangehenden Proposition ist $X_{\mathbb{R}} = T_0 \amalg \dots \amalg T_0 \amalg T_g$, wobei T_0 $(24 - 2\lambda - 1)$ -mal auftaucht (nach 3.75). Somit

$$\begin{aligned} 2b - 20 &= \chi(X_{\mathbb{R}}) = \chi(T_0) + \dots + \chi(T_0) + \chi(T_g) \\ &= 48 - 4\lambda - 2g. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$g = 11 - \frac{b + \lambda}{2}$$

und die Behauptung. □

Wir werden zeigen, daß jeder Wert (b, λ) in der Tabelle durch eine K3-Fläche über \mathbb{R} realisiert werden kann; zudem gibt es K3-Flächen $X_{\mathbb{C}}$ über \mathbb{R} mit $X_{\mathbb{R}} = \emptyset$, $X_{\mathbb{R}} = T_1 \amalg T_1$ und $X_{\mathbb{R}} = T_0 \amalg T_2$. Wir erhalten dadurch das folgende Ergebnis:

3.83 Satz: Jede reelle K3-Fläche ist diffeomorph zu genau einer der in Tabelle 3.2 angegebenen reellen Flächen.

Beweis: Der Beweis folgt aus den Sätzen 4.88 und 4.90 in Kapitel IV. Satz 4.88 beruht auf den nun folgenden Resultaten: □

Seien X, Y zwei glatte komplexe Varietäten und $p : Y \rightarrow X$ eine reguläre Abbildung¹². p induziert für jedes $p(y) \in X$ eine Abbildung $p^* : T_{p(y)}^* X \rightarrow T_y^* Y$, diese setzt

¹²Das heißt, $p = (p_1, \dots, p_n)$ mit regulären Abbildungen p_i .

	$9T_0 \amalg T_2$		$5T_0 \amalg T_6$		$T_0 \amalg T_{10}$				
	$9T_0 \amalg T_1$	$8T_0 \amalg T_2$	$5T_0 \amalg T_5$	$4T_0 \amalg T_6$	$T_0 \amalg T_9$	T_{10}			
$10T_0$	$8T_0 \amalg T_1$	$7T_0 \amalg T_2$	$6T_0 \amalg T_3$	$5T_0 \amalg T_4$	$4T_0 \amalg T_5$	$3T_0 \amalg T_6$	$2T_0 \amalg T_7$	$T_0 \amalg T_8$	T_9
	$9T_0$	$7T_0 \amalg T_1$	$6T_0 \amalg T_2$	$5T_0 \amalg T_3$	$4T_0 \amalg T_4$	$3T_0 \amalg T_5$	$2T_0 \amalg T_6$	$T_0 \amalg T_7$	T_8
	$8T_0$	$6T_0 \amalg T_1$	$5T_0 \amalg T_2$	$4T_0 \amalg T_3$	$3T_0 \amalg T_4$	$2T_0 \amalg T_5$	$T_0 \amalg T_6$	T_7	
		$7T_0$	$5T_0 \amalg T_1$	$4T_0 \amalg T_2$	$3T_0 \amalg T_3$	$2T_0 \amalg T_4$	$T_0 \amalg T_5$	T_6	
			$6T_0$	$4T_0 \amalg T_1$	$3T_0 \amalg T_2$	$2T_0 \amalg T_3$	$T_0 \amalg T_4$	T_5	
				$5T_0$	$3T_0 \amalg T_1$	$2T_0 \amalg T_2$	$T_0 \amalg T_3$	T_4	
					$4T_0$	$2T_0 \amalg T_1$	$T_0 \amalg T_2$	T_3	
						$3T_0$	$T_0 \amalg T_1$	T_2	$T_1 \amalg T_1$
						$2T_0$	T_1		
						T_0			
						\emptyset			

Tabelle 3.2: Die als reelle K3-Flächen realisierbaren reellen Flächen

sich fort zu einer Abbildung $p^* : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^n(Y)$.

Ist D ein Divisor in X , und C lokal bestimmt durch die Gleichung $f(x) = 0$, so wird durch die Gleichung $f(p(y)) = 0$ ein Divisor in Y bestimmt, den wir mit $p_*(D)$ bezeichnen. Da $p_*(f) = (f \circ p)$, stellt p_* eine wohldefinierte, injektive Abbildung $\text{Div}(X)/\mathbb{P}(X) \rightarrow \text{Div}(Y)/\mathbb{P}(Y)$ dar.

3.84 Lemma: Seien X, Y zwei glatte komplexe Varietäten und C eine Untervarietät von X mit komplexer Kodimension 1. Sei $p : Y \rightarrow X$ eine doppelte Überlagerung mit Verzweigung in C , so daß p eine reguläre Abbildung ist. Es gilt nun:

$$K_Y = p_*(K_X) + [p^{-1}(C)].$$

Beweis: Sei $\omega \in \Omega^n(X)$ eine n -dimensionale rationale Differentialform auf X . Sei $y \in Y$ und $x = p(y)$, dann läßt sich p lokal in Umgebungen von y und x schreiben als $p(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta) = (z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta^2)$. C ist dabei lokal definiert durch $\zeta = 0$. ω läßt sich lokal schreiben als $\omega = g(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d\zeta$, und somit:

$$\begin{aligned} p^*(\omega) &= g(z) dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \\ &= g(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d(\zeta^2) \\ &= 2\zeta g(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

Somit bleibt die Multiplizität der Nullstellen gleich, außer auf $C = \{\zeta = 0\}$, wo sie sich um 1 erhöht. Es folgt daraus die Behauptung. \square

3.85 Lemma: Seien die Bezeichnungen wie im vorigen Lemma. Es gilt:

$$[p^{-1}(C)] = \frac{1}{2} p_*([C])$$

Beweis: Wie im Beweis zum vorigen Lemma gelte lokal wieder $p(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta) = (z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta^2)$ und C sei als Divisor bestimmt durch $\zeta^m = 0$ (m ist gerade, da

es sonst keine doppelte Überlagerung gibt). $p^{-1}(C)$ wird damit ebenfalls bestimmt durch $\zeta^m = 0$, $p_*(C)$ allerdings durch die Gleichung $(\zeta^2)^m = \zeta^{2m} = 0$, somit gilt $p_*(C) = 2p^{-1}(C)$. Es folgt die Behauptung. \square

3.86 Proposition: Sei Y eine komplexe Fläche und doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ mit Verzweigung entlang einer Kurve $V(f)$ für ein homogenes komplexes Polynom f vom Grad m .

Y ist genau dann eine K3-Fläche, wenn $m = 6$ ist.

Beweis: $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus V(f)$ ist zusammenhängend, daher gibt es nach Satz 3.52 eine doppelte Überlagerung genau dann, wenn es eine Untergruppe vom Index 2 in $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus V(f)) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt, also genau dann, wenn m gerade. Nach 3.54 sind die doppelten Überlagerungen eindeutig, wir können daher OBdA annehmen, daß X folgendermaßen realisiert ist: Durch die Gleichung $z^m + f(x_0, x_1, x_2) = 0$ ist die universelle Überlagerung $\tilde{Y} \subset \mathbb{C}P^3$ (mit Verzweigung in $V(f)$) definiert. Identifiziert man nun die Punkte $(z : x_0 : x_1 : x_2)$ und $(z' : x_0 : x_1 : x_2)$ mit $z^{\frac{m}{2}} = z'^{\frac{m}{2}}$, so erhält man die doppelte Überlagerung Y . Nach einem Satz der algebraischen Geometrie ist Y eine glatte algebraische Varietät.

Bezeichne mit p bzw. \tilde{p} die Überlagerungsabbildungen $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ resp. $\tilde{Y} \rightarrow Y$ und seien C, \tilde{C} die Urbilder von $V(f)$ in Y und \tilde{Y} .

Sei k teilerfremd zu m , dann definiert $g(z : x_0 : x_1 : x_2) = (\varepsilon_m^k z : x_0 : x_1 : x_2)$ (ε_m : primitive m -te Einheitswurzel) einen Automorphismus $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$, so daß für $x = \tilde{p}(y) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ $\tilde{p}^{-1}(x) = \{g^s(y) \mid s = 0, \dots, m-1\}$.

i) Y ist einfach zusammenhängend:

Sei γ eine Schleife in Y , $y := \gamma(0)$ und $\tilde{y} \in \tilde{p}^{-1}(y) \subset \tilde{Y}$. Nach dem Liftungssatz 3.50 gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\gamma} \subset \tilde{Y}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{y}$. Falls $\gamma \cap C \neq \emptyset$, dann auch $\tilde{\gamma} \cap \tilde{C} \neq \emptyset$ und $\tilde{\gamma}$ ist eine Schleife in \tilde{Y} . Somit $\gamma \in \tilde{p}^*(\pi_1(\tilde{Y})) = \{e\}$ und γ zusammenziehbar.

Falls $\tilde{\gamma} \cap \tilde{C} = \emptyset$, so gibt es einen Automorphismus $g : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$, so daß $\tilde{\gamma}(1) = g(\tilde{y})$. Wähle nun einen Weg τ , der \tilde{y} mit \tilde{C} verbindet. $\tau^{-1} \cdot g(\tau) \cdot \tilde{\gamma}$ ist eine Schleife in \tilde{Y} . Nach den selben Überlegungen wie gerade eben ist

$$\begin{aligned} e &\sim \tilde{p}(\tau^{-1} \cdot g(\tau) \cdot \tilde{\gamma}) \\ &= (\tilde{p}(\tau))^{-1} \cdot (\tilde{p}(\tau)) \cdot \gamma \\ &\sim \gamma \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung.

ii) Berechnung von K_Y :

Nach den Lemmata 3.84 und 3.85 haben wir

$$\begin{aligned} K_Y &= p_*(K_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}) - \frac{1}{2}p_*([V(f)]) \\ &= p_*(3[H] - \frac{1}{2}p_*(m[H])) \\ &= p_*((3 - \frac{m}{2})[H]), \end{aligned}$$

d.h. $K_Y = 0 \iff m = 6$, da p_* injektiv ist. \square

3.87 Proposition: Sei Y eine komplexe Fläche, Q eine Quadrik und $V(f)$ eine Fläche in $\mathbb{C}P^3$ für ein homogenes komplexes Polynom f vom Grad m , so daß Y eine doppelte Überlagerung von $Q \cap V(f)$ darstellt. Y ist genau dann eine K3-Fläche, wenn $m = 4$ ist.

Beweis: $\pi_1(Q \cap V(f)) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, daher existiert die doppelte Überlagerung von $Q \cap V(f)$ wieder genau dann, wenn m gerade ist. Die universelle Überlagerung \tilde{Y} und die doppelte Überlagerung Y lassen sich ähnlich wie im Beweis zur vorigen Proposition algebraisch realisieren. Seien $p : Y \rightarrow Q \cap V(f)$ und $\tilde{p} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ die Überlagerungsabbildungen und C, \tilde{C} die Urbilder von $Q \cap V(f)$ in Y bzw. \tilde{Y} .

i) Y ist einfach zusammenhängend:

Dies läßt sich ganz analog zum vorigen Fall beweisen.

ii) Berechnung von K_Y :

Wir haben wieder

$$\begin{aligned} K_Y &= p_*(K_Q) - \frac{1}{2}p_*([Q \cap V(f)]_Q) \\ &= p_*((4 - \deg Q)[H]) - \frac{1}{2}p_*[V(f)] \\ &= (2 - \frac{m}{2})p_*([H]). \end{aligned}$$

Daher ist $K_Y = 0 \iff m = 4$. \square

Diese zwei Propositionen sind die Grundlage für die Realisierung von K3-Flächen über \mathbb{R} in Kapitel IV, die die Vollendung des Beweises von Satz 3.83 ermöglichen.

IV Realisierung reeller K3-Flächen

Wir realisieren reelle K3-Flächen auf zwei verschiedene Arten: als doppelte Überlagerung des Positivteils einer reellen projektiven Kurve vom Grad 6 mit Verzweigung entlang eben dieser Kurve einerseits, andererseits als doppelte Überlagerung des Positivteils einer reellen biprojektiven Kurve vom Bigrad (4,4), ebenfalls mit Verzweigung entlang der Kurve. Es zeigt sich, daß schon die erste Methode ausreicht, um alle reellen K3-Flächen zu konstruieren. Bis auf eine Fläche, $9T_0II T_2$, lassen sich die erforderlichen Kurven als T-Kurven mit der Viro-Methode zusammensetzen. Diese Konstruktionen finden sich im Anhang; der Abschnitt über Triangulationen in diesem Kapitel dient dazu, die Regularität der verwendeten Triangulationen nachzuweisen.

4.1 Überlagerungen

Wir konstruieren nun die (verzweigten) Überlagerungen, die zur Realisierung reeller K3-Flächen führen.

Sei $f(X_1, \dots, X_n)$ ein reelles, nichtsinguläres Polynom, dann sind

$$Y_f := \{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t^2 = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

und Y_{-f} doppelte Überlagerungen von

$$X_f^+ := \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$$

bzw. X_{-f}^+ mit Verzweigung entlang $V(f)$.

Falls f homogen und $\deg f$ gerade, so definiere

$$\overline{Y}_f := \{(t : x_1 : \dots : x_n) \mid t \in \mathbb{R} \text{ und } (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \text{ mit } t^2 = f(x_1, \dots, x_n)\},$$

mit der Identifizierung

$$\begin{aligned} (t : x_1 : \dots : x_n) &\sim (t' : x'_1 : \dots : x'_n) \\ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda^{\frac{\deg f}{2}} t, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= (t', x'_1, \dots, x'_n). \end{aligned}$$

\overline{Y}_f ist damit wohldefiniert. Für nichthomogenes f sei $\overline{Y}_f := \overline{Y_{fh}}$.

\overline{Y}_f ist eine doppelte Überlagerung von

$$\overline{X}_f^+ := \{(x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$$

mit Verzweigung entlang $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$.

4.88 Satz: Falls $f(X_0, X_1, X_2)$ ein reelles, homogenes Polynom vom Grad 6 ist, dann ist \overline{Y}_f eine reelle K3-Fläche.

Beweis: Nach Proposition 3.86 ist die doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ mit Verzweigung entlang $V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ eine K3-Fläche. Sei X diese Fläche mit Überlagerungsabbildung $p : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, dann kann man $X' := X \setminus p^{-1}(V(f))$ als Menge von Homotopieklassen von Wegen in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus V(f)$ ansehen, die einen festen Startpunkt $x_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 (\subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ besitzen. Die Punkte in X' werden mit den Endpunkten dieser Wege identifiziert. Sei γ ein solcher Weg, dann ist $\overline{\gamma}$ ebenfalls ein solcher Weg, da $\overline{\gamma} \subset X'$ und $\overline{\gamma}(0) = \overline{x_0} = x_0$. Die komplexe Konjugation stellt somit eine Involution auf X' , und wegen Stetigkeit auch auf X , dar. Nach Proposition 1.9 ist X somit eine K3-Fläche über \mathbb{R} und \overline{Y}_f als Fixpunktmenge unter komplexer Konjugation eine reelle K3-Fläche. \square

Beispiel: $f(X, Y) = (X^2 + Y^2 - 1)^3 \Rightarrow f^h(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2 - Z^2)^3$.

$\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$ ist ein Kreis, innerhalb dessen f^h negativ, außerhalb dessen positiv ist. Da die doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ die S^2 ist (siehe die Beispiele auf Seite 54 in Kapitel III), ist \overline{Y}_f als die doppelte Überlagerung von X_f^+ mit Verzweigung entlang $\overline{V(f)}$ ein Torus. X_{-f}^+ ist homöomorph zur Scheibe D^2 , Y_{-f} ist daher die Sphäre S^2 .

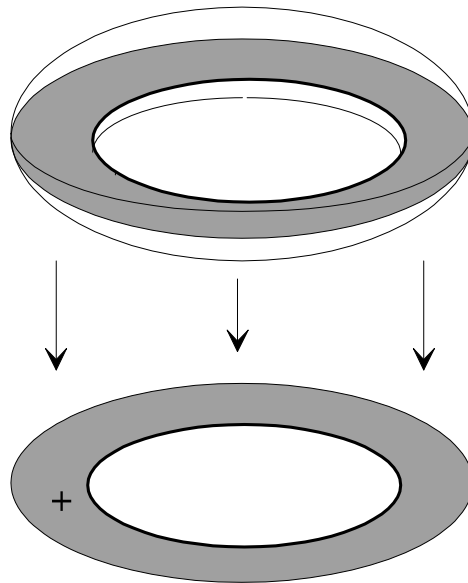


Bild 4.47: Doppelte Überlagerung von \mathbb{P}^2 verzweigt an einem Kreis. \overline{X}_f^+ ist grau schraffiert.

Sei $f(X, Y)$ nun ein reelles, nichtsinguläres Polynom mit $\deg f$ gerade, so daß $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve mit dem Schema $\langle(n-k) \amalg k \langle l \rangle \rangle$ ist (nach Proposition 1.23 kann die projektive Linie 'J' nicht vorkommen).

$\overline{Y_f}$ und $\overline{Y_{-f}}$ sind dann ein n -Torus plus $k-l$ Sphären, bzw. k l -Tori plus $n-k$ Sphären.



Bild 4.48: \mathbb{P}^2 mit Kurve vom Schema $\langle(n-k) \amalg k \langle l \rangle \rangle$

Wir werden $\overline{Y_f}$ und $\overline{Y_{-f}}$ der Einfachheit halber *doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ verzweigt an f* nennen.

Falls $f(X_0, X_1, Y_0, Y_1)$ $(2m_1, 2m_2)$ -homogen ist, so definiere analog

$$\overline{Y_f} := \{(t : x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \mid t \in \mathbb{R}, (x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ mit } t^2 + f(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0\},$$

mit der Identifizierung

$$(t : x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \sim (t' : x'_0 : x'_1 : y'_0 : y'_1) \\ \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} t, \lambda_1 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 y_0, \lambda_2 y_1) = (t', x'_0, x'_1, y'_0, y'_1).$$

$\overline{Y_f}$ ist damit wohldefiniert. Für $f(X_1, Y_1)$ mit $\deg_{X_1} = 2m_1, \deg_{Y_1} = 2m_2$ sei $\overline{Y_f} := \overline{Y_{f^{bh}}}$.

$\overline{Y_f}$ ist eine doppelte Überlagerung von

$$X_f^+ := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid f(x_0, x_1, x_2, x_3) \geq 0\}$$

mit Verzweigung entlang $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Bemerkung: Wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen $\overline{Y_f}$ als Überlagerung von \mathbb{P}^n und $\overline{Y_f}$ als Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, da in der Regel klar ist, welcher Fall vorliegt.

4.89 Satz: Falls $f(U_0, U_1, V_1, V_2)$ ein reelles, bihomogenes Polynom vom Multigrad $(4,4)$ ist, dann ist $\overline{Y_f}$ eine reelle K3-Fläche.

Beweis: In Kapitel I wurde auf Seite 18 gezeigt, daß sich $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ als Lösungsmenge der reellen Quadrik $X_0 X_1 - X_2 X_3$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ auffassen läßt (die Quadrik beschreibt einen Hyperboloiden). Mit der dort beschriebenen Transformation ist

$$f(U_0, U_1, V_0, V_1) = (U_0 V_0)^4 g\left(\frac{U_1}{U_0}, \frac{V_1}{V_0}\right) = X_0^4 g\left(\frac{X_1}{X_2}, \frac{X_2}{X_0}\right).$$

Der letzte Ausdruck beschreibt ein reelles homogenes Polynom vom Grad 4. Die Behauptung folgt damit analog zum Beweis von Satz 4.88, mit Hilfe von Proposition 3.87. \square

Beispiel: Sei $f(X_1, Y_1) = (X_1^2 + Y_1^2 - 1)^2 \Rightarrow f^{bh}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = (X_1^2 Y_0^2 + X_0^2 Y_1^2 - X_0^2 Y_0^2)^2$.

$\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist ein Kreis, innerhalb dessen f^{bh} positiv, außerhalb dessen negativ ist. Da die doppelte Überlagerung von \mathbb{P}^1 die S^1 ist (siehe die Beispiele auf Seite 54 in Kapitel III), ist die doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ der Torus $S^1 \times S^1 = T_1$. $\overline{Y_f}$ ist somit ein Torus vom Geschlecht 2. $\overline{Y_{-f}}$ ist wieder die S^1 .

Sei $f(X_1, Y_1)$ ein reelles, nichtsinguläres Polynom mit $\deg_{X_1} f$ und $\deg_{Y_1} f$ gerade, so daß $\overline{V(f)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ eine Kurve mit dem Schema $\langle (n-k) \amalg k \langle l \rangle \rangle$ ist. $\overline{Y_f}$ und $\overline{Y_{-f}}$ sind dann ein $n+1$ -Torus plus l Sphären, bzw. k l -Tori plus $n-k$ Sphären.

Ist das Schema der Kurve $\langle n \amalg J^2 \langle l \rangle \rangle$, so bestehen $\overline{Y_f}$ und $\overline{Y_{-f}}$ aus n Sphären und einem l -Torus bzw. einem $(n+1)$ -Torus und l Sphären.



Bild 4.49: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit Kurve vom Schema $\langle (n-k) \amalg k \langle l \rangle \rangle$

4.2 Realisierungen

Es stellt sich nun die Frage, welche reellen K3-Flächen auf diese Weise konstruiert werden können. Dazu ist es erforderlich zu wissen, wie die entsprechenden Kurven aussehen können.

Die Klassifikation der reellen Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vom Grad 6 wurde 1969 durch Gudkov vollendet [Gud].

4.90 Satz: Eine reelle, nichtsinguläre projektive algebraische ebene Kurve vom Grad 6 hat genau einen der 56 unten aufgeführten Isotopie-Typen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \langle 9 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle & & \langle 5 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle & & & & \langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle \\
 \langle 10 \rangle \langle 8 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle & & \langle 5 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle & & & & \langle 1 \amalg 1 \langle 8 \rangle \rangle \langle 1 \langle 9 \rangle \rangle \\
 & \langle 9 \rangle \langle 7 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 7 \rangle \rangle \langle 1 \langle 8 \rangle \rangle & & & & & \\
 & & \langle 8 \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \langle 7 \rangle \rangle & & & & \\
 & & & \langle 7 \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \langle 6 \rangle \rangle & & & \\
 & & & & \langle 6 \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \langle 5 \rangle \rangle & & \\
 & & & & & \langle 5 \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \langle 4 \rangle \rangle & \\
 & & & & & & \langle 4 \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \langle 3 \rangle \rangle \\
 & & & & & & & \langle 3 \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \langle 2 \rangle \rangle & \langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle \\
 & & & & & & & & \langle 2 \rangle \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \\
 & & & & & & & & \langle 1 \rangle \\
 & & & & & & & & \langle 0 \rangle
 \end{array}$$

Tabelle 4.3: Isotopietypen reeller, nichtsingulärer projektiver algebraischer ebener Kurven vom Grad 6.

Die Typen reeller Kurven in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ vom Bigrad $(4, 4)$ sind ebenfalls bekannt (siehe [DK]):

Nach Harnacks Ungleichung besitzt eine solche Kurve maximal 10 Zusammenhangskomponenten. Diese können folgende Schemas realisieren (um eine Isotopie-Klassifikation zu erhalten, muß man allerdings noch die einseitigen Kreise differenzieren nach dem Element, das sie in $\pi_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ realisieren):

- a) $\langle \alpha \amalg 1 \langle \beta \rangle \rangle$, mit $\alpha + \beta \leq 7$, sowie $\langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$, $\langle 4 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 8 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 1 \langle 8 \rangle \rangle$, $\langle 3 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 4 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle$, $\langle 7 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 9 \rangle$,
- b) $\langle \alpha \amalg J^2 \langle \beta \rangle \rangle$, mit $0 \leq \alpha + \beta \leq 8$,
- c) $\langle 2J^2 \rangle$,
- d) $\langle 2 \langle 1 \rangle \rangle$,
- e) $\langle 0 \rangle$.

4.91 Korollar: Jede reelle K3-Fläche kann als doppelte Überlagerung des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit Verzweigung entlang einer Kurve vom Grad 6 realisiert werden.

Beweis: Der Beweis folgt aus den Sätzen 4.88 und 4.90 durch den direkten Vergleich der möglichen Typen von reellen K3-Flächen (siehe Tabelle 3.1) und den Kurven vom Grad 6 (Tabelle 4.3). \square

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun gewesen, zu versuchen, die entsprechenden Kurven mit Hilfe der Methode von Viro zu realisieren:

4.92 Satz: Fast alle reellen K3-Flächen können als doppelte Überlagerung des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ oder des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ mit Verzweigung entlang T-Kurven vom Grad 6 resp. Bigrad (4,4) realisiert werden.

Nicht konstruiert werden konnte die Fläche des Typs $9S^2 \amalg T_2$, die nur durch Kurven mit dem Schema $\langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle$ (in \mathbb{P}^2) bzw. $\langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$ (in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) realisiert werden kann.

Beweis: Die Konstruktionen befinden sich aus Platzgründen im Anhang. Der Satz folgt damit aus Korollar 2.46 und den Ergebnissen dieses Kapitels, wobei zu beachten ist, daß die Gesamtheit der reellen K3-Flächen durch Tabelle 3.2 genau gegeben ist. Es bleibt nur zu beweisen, daß die Triangulationen, die in den Konstruktionen auftreten, regulär sind. Dies ergibt sich aus dem folgenden Abschnitt, der ein Argument liefert, wie man die verwendeten Triangulationen als schrittweise Verfeinerung von einfacheren regulären Polygon-Unterteilungen ansehen kann, die schließlich die Regularität liefern. \square

4.3 Triangulationen

4.93 Proposition: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes Polygon und $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine Unterteilung von Δ in konvexe Polygone mit Ecken $(\sigma_l)_{l=1}^n$. Es sind äquivalent:

- (i) ν ist stückweise linear auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ und für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ mit $i \neq j$ und $\partial\Delta_i \cap \partial\Delta_j \neq \emptyset$:

$$\sigma_l \in \Delta_j \implies \nu(\sigma_l) > \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l)$$

- (ii) ν ist eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$.

- (iii) ν ist stückweise linear auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ und

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad \forall x \in \Delta_j \setminus \Delta_i \\ \nu(x) > \nu|_{\Delta_i}(x) \end{aligned}$$

- (iv) ν ist stückweise linear auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ und

$$\begin{aligned} \forall x \in \Delta_i, x' \in \Delta_j, i \neq j, \forall t \in (0, 1) \\ t\nu(x) + (1-t)\nu(x') > \nu(tx + (1-t)x') \end{aligned}$$

- (v) Für alle $x, x' \in \Delta$ ist $\nu|_{[x, x']}$ streng konvex auf der durch die $(\Delta_i)_{i=1}^N$ induzierten Unterteilung von $[x, x']$ (dabei ist $[x, x'] := \{tx + (1-t)x' \mid t \in [0, 1]\}$).

Beweis: (ii) \Rightarrow (iii):

Sei $x \in \Delta_j \setminus \Delta_i$, oBdA $\nu|_{\Delta_i} = 0$. Seien $\sigma_0, \dots, \sigma_{n'}$ die Ecken von Δ_j mit $\nu(\sigma_0) \leq \nu(\sigma_l) \forall l = 1, \dots, n'$. Sei $x \in \Delta_j$. Aufgrund der Konvexität von Δ_j läßt sich x schreiben als

$$x = \sigma_0 + \sum_{l=1}^{n'} t_l (\sigma_l - \sigma_0) \quad \text{mit } 0 \leq t_l \leq 1 \quad \forall l = 1, \dots, n'.$$

Mit $\nu = \tilde{\nu} + \nu(0)$:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \tilde{\nu}(\sigma_0 + \sum_{l=1}^{n'} t_l (\sigma_l - \sigma_0)) + \nu(0) \\ &= \sum_{l=1}^{n'} t_l \tilde{\nu}(\sigma_l - \sigma_0) + \tilde{\nu}(\sigma_0) + \nu(0) \\ &= \sum_{l=1}^{n'} t_l (\nu(\sigma_l) - \nu(\sigma_0)) + \nu(\sigma_0) > 0, \end{aligned}$$

da entweder $\nu(\sigma_0) > 0$ oder

$\nu(\sigma_0) = 0 \Rightarrow \sigma_0 \in \Delta_i \Rightarrow \nu(\sigma_l) > \nu(\sigma_0)$ für alle σ_l mit $\sigma_l \notin \Delta_i$. Daher existiert ein $l \in \{1, \dots, n'\}$ mit $t_l > 0$ und $\nu(\sigma_l) > \nu(\sigma_0)$.

(iii) \Rightarrow (iv):

Seien $x \in \Delta_i, x' \in \Delta_j, i \neq j$, und $t \in (0, 1)$. Setze $y := tx + (1-t)x'$, etwa $y \in \Delta_k, k \neq j$. OBdA sei $\nu|_{\Delta_k} = 0 \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} \nu(x) \geq 0, \nu(x') > 0 \Rightarrow t\nu(x) + (1-t)\nu(x') > 0 = \nu(y)$.

(iv) \Rightarrow (v):

Seien $x, x' \in \Delta$. Aus der stückweisen Linearität von ν auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ folgt durch Restriktion die stückweise Linearität von $\nu|_{[x, x']}$ auf der durch die $(\Delta_i)_{i=1}^N$ induzierten Unterteilung von $[x, x']$. Die Bedingung (2) der strengen Konvexität folgt leicht einsichtig aus der Definition von $[x, x'] = \{tx + (1-t)x' \mid t \in [0, 1]\}$ und (iv).

(v) \Rightarrow (ii):

Seien $i \in \{1, \dots, N\}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$ Ecken von Δ_i , so daß $\{\sigma_1 - \sigma_0, \dots, \sigma_m - \sigma_0\}$ eine Basis von \mathbb{R}^m darstellen. Sei μ die durch die Werte von ν an den Ecken $\sigma_0, \dots, \sigma_m$ bestimmte affine Funktion, oBda $\mu = 0$.

Aufgrund von (v) ist klar, daß $\nu = 0$ auf $\partial(\text{Conv}(\sigma_0, \dots, \sigma_m))$ und damit auch $\nu = 0$ auf $\text{Conv}(\sigma_0, \dots, \sigma_m)$.¹³ Für $x \in \Delta_i \setminus \text{Conv}(\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ gibt es $0 \leq k \leq m$, so daß $[x, \sigma_k] \cap \text{Conv}(\sigma_0, \dots, \sigma_m) = [x', \sigma_k], x' \neq \sigma_k$. $\nu(x') = \nu(\sigma_k) = 0$, damit wegen der Linearität von ν auf $[x, \sigma_k]$ auch $\nu(x) = 0$. Damit $\nu = 0 = \mu$ und ν affin auf Δ_i .

¹³Conv bezeichne die konvexe Hülle.

Für $\sigma_l \notin \Delta_j$ sei $x \in \Delta_j$. Aus der strengen Konvexität von $\nu|_{[x, \sigma_l]}$ folgt $\nu(\sigma_l) > \nu|_{\Delta_i \cap [x, \sigma_l]}(\sigma_l) = \nu|_{\Delta_i}(\sigma_l)$.

Um den Beweis zu vollenden reicht es nun, (i) \Rightarrow (v) zu zeigen, da (ii) \Rightarrow (i) trivialerweise gilt:

Seien $x, x' \in \Delta$, $([x_i, x_{i+1}])_{i=1}^{k-1}$ die durch die $(\Delta_i)_{i=1}^N$ induzierte Unterteilung von $[x, x']$ ($x = x_1, x' = x_k$). OBdA ist $[x_i, x_{i+1}] \subset \Delta_i$, damit also $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \emptyset$. Aus (i) folgt nun mit denselben Überlegungen wie bisher (allerdings ist $\Delta_i \cup \Delta_{i+1}$ nicht zwingend konvex), daß $\nu|_{[x_i, x_{i+2}]}$ konvex ist für alle $i = 1, \dots, k-2$. Damit ist auch $\nu|_{[x_1, x_k]} = \nu|_{[x, x']}$ streng konvex. \square

4.94 Definition: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon und $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine Unterteilung von Δ in konvexe Polygone, $(\Gamma_s)_{s=1}^{K'}$ seien die Kanten der Polygone Δ_i . Die Menge $\partial\Delta \supset \bigcup_{t=1}^{K'} \Gamma_{s_t}$, $s_t \leq K' \quad \forall t = 1, \dots, K'$, heißt *knickbar* (für Δ), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\Gamma_{s_t} \subset \partial\Delta \quad \forall t = 1, \dots, K'$.
- Für jede Funktion $g : \bigcup_{t=1}^{K'} \Gamma_{s_t} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\forall t = 1, \dots, K' \quad g|_{\Gamma_{s_t}}$ streng konvex auf der durch die $(\Delta_i)_{i=1}^N$ induzierten Unterteilung von Γ_{s_t} ist, gibt es eine streng konvexe Funktion $\nu : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ mit $\nu|_{\Gamma_{s_t}} = g|_{\Gamma_{s_t}} \quad \forall t = 1, \dots, K'$.

Beispiele:

- a) Seien $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ Dreiecke mit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Dann ist $\partial\Delta$ knickbar.
- b) Sei $\Delta = [x, x'] \subset \mathbb{R}$ und $([x_i, x_{i+1}])_{i=1}^N$ eine Unterteilung von $[x, x']$. Dann ist $\partial\Delta = \{x, x'\}$ knickbar, d.h. für jeden vorgegebenen Wert $g(x)$ und $g(x')$ gibt es eine streng konvexe Funktion auf $([x_i, x_{i+1}])_{i=1}^N$ mit $\nu(x) = g(x)$ und $\nu(x') = g(x')$.

4.95 Proposition: Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}^2$, $\Delta = \text{Conv}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, so daß $\sigma_l \in \partial\Delta$ für alle $l = 1, \dots, n$. Sei $(\Delta_i)_{i=1}^N$ (mit $N = n-2$) Triangulation von Δ , so daß die Ecken der Δ_i genau $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sind (eine solche Triangulation wird durch disjunkte Diagonalen von Δ eindeutig bestimmt und wir nennen sie daher *Diagonalen-Triangulation*). Sei $j \in \{1, \dots, N\}$ und Γ eine Kante von Δ mit $\Gamma \cap \Delta_j \neq \emptyset$, μ eine affine Funktion auf Δ_j und g eine streng konvexe Funktion auf der durch die $(\Delta_i)_{i=1}^N$ induzierten Unterteilung von Γ mit $g|_{\Delta_j \cap \Gamma} = \mu|_{\Delta_j \cap \Gamma}$. Dann gibt es eine streng konvexe Funktion ν auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ mit $\nu|_{\Delta_j} = \mu$ und $\nu|_{\Gamma} = g$.

Bemerkung: Insbesondere ist Γ in der obigen Proposition knickbar.

Beweis: OBdA gelte $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \Gamma_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, N-1$ und $j = 1$. (Ansonsten läßt sich Δ an Δ_j in zwei Hälften teilen, für die das Problem getrennt

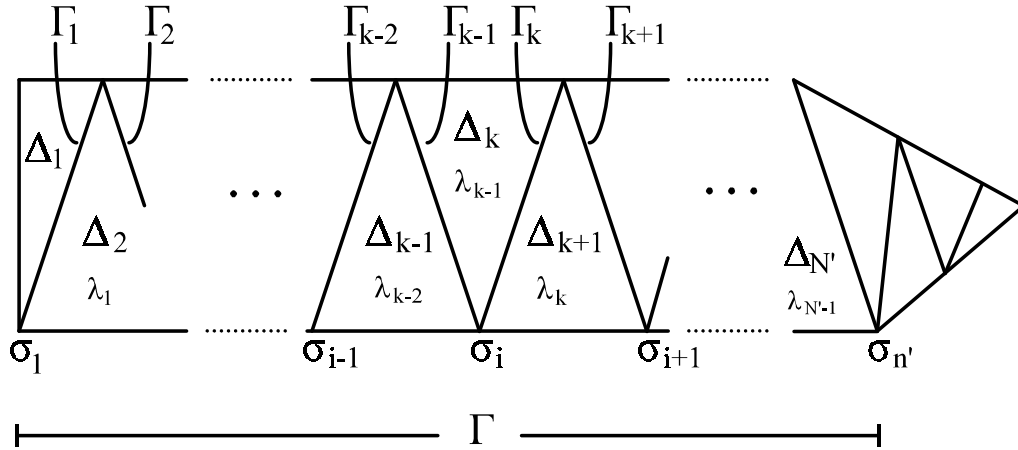


Bild 4.50: Δ mit Diagonaltriangulation

gelöst wird. Es ist leicht ersichtlich, daß aus diesen zwei Lösungen eine Gesamtlösung erhalten werden kann.) Weiterhin gelte oBdA $\mu = 0$.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ lineare Funktionen, so daß für alle $i = 1, \dots, N - 1$ $\Gamma_i = \{(x_1, x_2) \in \Delta \mid \alpha_i(x_1, x_2) = 0\}$ und $\alpha_i \geq 0$ auf $\Gamma_{i+1}, \dots, \Gamma_{N-1}$ (möglich, da die Γ_i alle 'nebeneinander' liegen). Es läßt sich leicht überprüfen, daß für jede Wahl von $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1} > 0$

$$\nu(x) = \begin{cases} \lambda_1 \alpha_1(x) + \dots + \lambda_i \alpha_i(x), & x \in \Delta_{i+1} \\ 0, & x \in \Delta_1 \end{cases}$$

streng konvex auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$ ist.

Sei etwa $([\sigma_i, \sigma_{i+1}])_{i=1}^{N'}$ die Unterteilung von Γ . Wähle nun sukzessive die λ_k so, daß

$$\begin{aligned} \nu(\sigma_{i+1}) - \nu|_{\Delta_{k-1}}(\sigma_{i+1}) &= \lambda_{k-1} \alpha_{k-1}(\sigma_{i+1}) + \lambda_k \alpha_k(\sigma_{i+1}) \\ &\stackrel{!}{=} g(\sigma_{i+1}) - g|_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i]}(\sigma_{i+1}). \end{aligned}$$

(Dabei seien σ_i, σ_{i+1} die Ecken von Δ_{k+1} , d.h. σ_{i+1} ist Endpunkt von Γ_{k+1} und Γ_{k+2} , siehe Bild 4.50.)

Wähle dafür $\lambda_{k-1} > 0$ klein genug, dann erfüllt

$$\lambda_k := \left(g(\sigma_{i+1}) - g|_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i]}(\sigma_{i+1}) - \lambda_{k-1} \alpha_{k-1}(\sigma_{i+1}) \right) / \alpha_k(\sigma_{i+1}) > 0$$

diese Bedingung. Für $k > N' - 1$ wähle $\lambda_k = 1$. □

4.96 Satz: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon, $(\Delta_i)_{i=1}^N$ eine reguläre Unterteilung von Δ in konvexe Polygone. Sei ferner für alle $i = 1, \dots, N$ $(\Delta_k^{(i)})_{k=1}^{N_i}$ eine Unterteilung von Δ_i , so daß $(\Delta_k^{(1)})_{k=1}^{N_1}$ eine reguläre Unterteilung und für alle $i = 2, \dots, N$ $\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_i$ knickbar für Δ_i ist.

Dann ist $(\Delta_k^{(i)})_{i,k}$ eine reguläre Unterteilung von Δ .

Beweis: Eine streng konvexe Funktion ν kann als Anweisung zum 'Knicken' von Δ angesehen werden. Wird nun jedes Δ_i wieder geknickt, bleibt die dadurch entstehende Funktion streng konvex, solange die neuen Knicke 'klein genug' sind.

Sei also ν eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_i)_{i=1}^N$, sowie $\nu^{(1)}$ eine streng konvexe Funktion auf $(\Delta_k^{(1)})_{k=1}^{N_1}$. Bestimme nun induktiv für $i = 2, \dots, N$ streng konvexe Funktionen $\nu^{(i)}$ auf $(\Delta_k^{(i)})_{k=1}^{N_i}$ wie folgt:

Durch $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(i-1)}$ ist eine streng konvexe Funktion $g : \Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_i \rightarrow \mathbb{R}$ auf der durch die $(\Delta_k^{(i)})_{i,k}$ induzierten Unterteilung von $\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_i$ gegeben. Da diese Menge nach Voraussetzung knickbar ist, gibt es eine streng konvexe Funktion $\nu^{(i)}$ auf $(\Delta_k^{(i)})_{k=1}^{N_i}$ mit $\nu^{(i)}|_{\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_i} = g$.

Für $\lambda > 0$ ist $(\nu^{(j)} - \nu|_{\Delta_j})\lambda + \nu|_{\Delta_j} =: \nu_\lambda^{(j)}$ weiterhin streng konvex auf $(\Delta_k^{(j)})_{k=1}^{N_j}$, $1 \leq j \leq i$. Für $\lambda \rightarrow 0$ erfüllt die auf $\bigcup_{j=1}^i \Delta_i$ durch $\nu_\lambda|_{\Delta_j} = \nu_\lambda^{(j)}$ definierte Funktion Bedingung (2) der strengen Konvexität. Ersetze für ein solches λ nun jeweils $\nu^{(j)}$ durch $\nu_\lambda^{(j)}$ ($j = 1, \dots, i$). Die nach $N - 1$ Schritten so erhaltene Funktion ν_λ ist streng konvex auf $(\Delta_k^{(i)})_{i,k}$. \square

4.97 Proposition: Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ konvexes Polygon mit regulärer Unterteilung $(\Delta_i)_{i=1}^N$, $\Delta' \subset \Delta$ ebenfalls konvex. Dann ist $(\Delta'_i)_{i=1}^N$ mit $\Delta'_i = \Delta_i \cap \Delta'$ reguläre Unterteilung von Δ' .

Beweis: klar. \square

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun zeigen, daß die folgenden häufig vorkommenden Bausteine regulär unterteilt sind:

Die Regularität des Bausteins (B1)

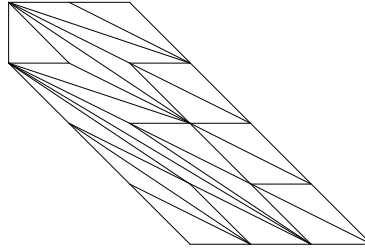
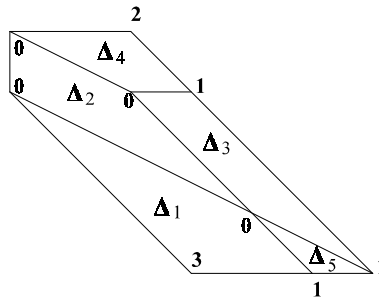
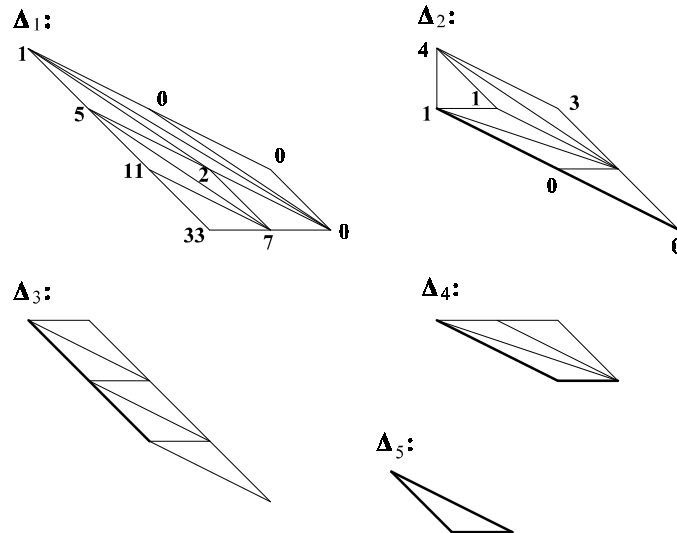


Bild 4.51: Der Baustein (B1).



Grobunterteilung von (B1). Die angegebenen Werte an den Ecken definieren eine streng konvexe Funktion.



Für Δ_1 und Δ_2 definieren die angegebenen Werte eine streng konvexe Funktion auf ihrer Triangulation, Δ_3 und Δ_4 sind reguläre Triangulationen nach Proposition 4.95. Die fett abgebildeten Kanten sind knickbar: das ist einfach zu sehen für Δ_2 und Δ_5 , für Δ_3 und Δ_4 folgt dies aus (4.95). Somit stellt nach Satz 4.96 (B1) eine reguläre Triangulation dar.

Die Regularität des Bausteins (B1')

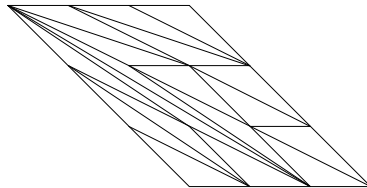
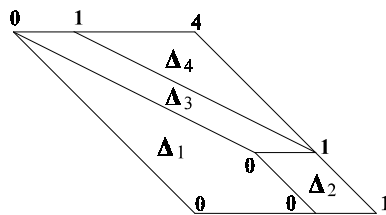
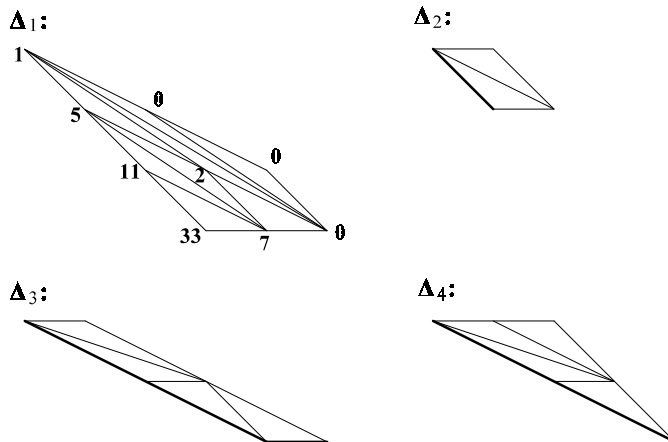


Bild 4.52: Der Baustein (B1').



Grobunterteilung von (B1'). Die angegebenen Werte an den Ecken definieren eine streng konvexe Funktion.



Δ_1 ist regulär wie für (B1), Δ_2, Δ_3 und Δ_4 sind reguläre Triangulationen nach Proposition 4.95, wobei die fetten Kanten knickbar sind. Somit stellt nach Satz 4.96 (B1') eine reguläre Triangulation dar.

Die Regularität des Bausteins (B2)

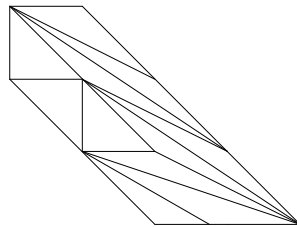
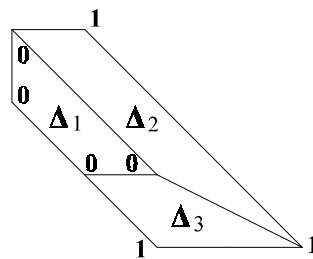
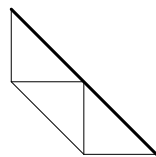


Bild 4.53: Der Baustein (B2).

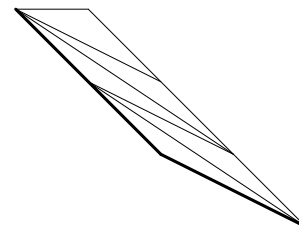


Grobunterteilung von (B2). Die angegebenen Werte an den Ecken definieren eine streng konvexe Funktion.

Δ_1 :



Δ_2 :



Δ_3 :



Nach Proposition 4.95 sind Δ_1 , Δ_2 und Δ_3 reguläre Triangulationen und die fett abgebildeten Kanten sind knickbar. Somit stellt nach Satz 4.96 (B2) eine reguläre Triangulation dar.

Die Regularität des Bausteins (B3)

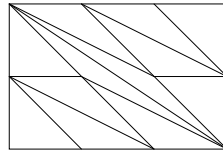
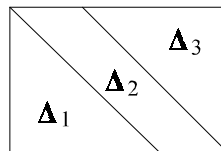
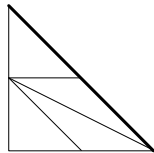


Bild 4.54: Der Baustein (B3).

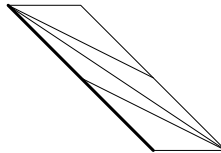


Grobunterteilung von (B3). Die Regularität ist offensichtlich.

Δ_1 :



Δ_2 :



Nach Proposition 4.95 sind Δ_1 , Δ_2 und Δ_3 reguläre Triangulationen und die fett abgebildeten Kanten knickbar. Nach Satz 4.96 stellt (B3) also eine reguläre Triangulation dar.

4.4 Abschließende Bemerkungen

In der Arbeit wurde ein Verbindungsweg zwischen Kombinatorik und K3-Flächen aufgezeigt. Es scheint, daß diese Methode vor allem dazu geeignet ist, zu zeigen, welche K3-Flächen konstruiert werden können, aber sie gibt kaum Anhaltspunkte dafür, welche K3-Flächen *nicht* konstruiert werden können. In der Tat entspringen die besten Restriktionen für das kombinatorische Problem im ebenen Fall der Tatsache, daß dabei algebraische Kurven konstruiert werden, für die gute Restriktionen bekannt sind.

Ein Fernziel dieser Arbeit ist es, die Viro-Methode zur Untersuchung von dreidimensionalen Calabi-Yau-Varietäten anzuwenden. Allerdings scheint die Methode in höheren Dimensionen weniger effektiv zu sein: Der Versuch, K3-Flächen direkt als Flächen (Quartiken) in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ zu konstruieren, wurde bald abgebrochen, da zu wenige Flächen auf diese Weise realisiert werden konnten.

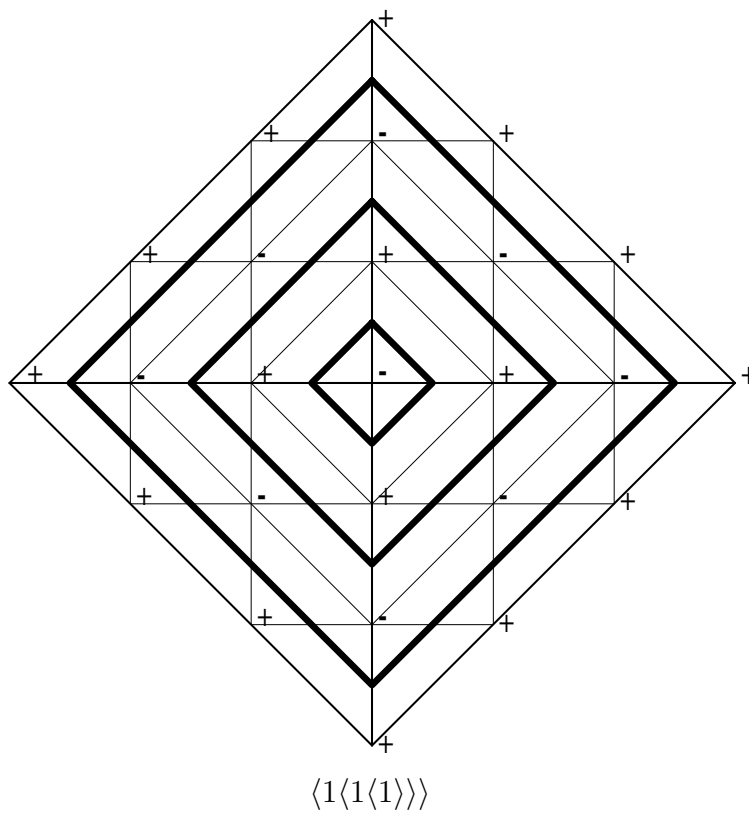
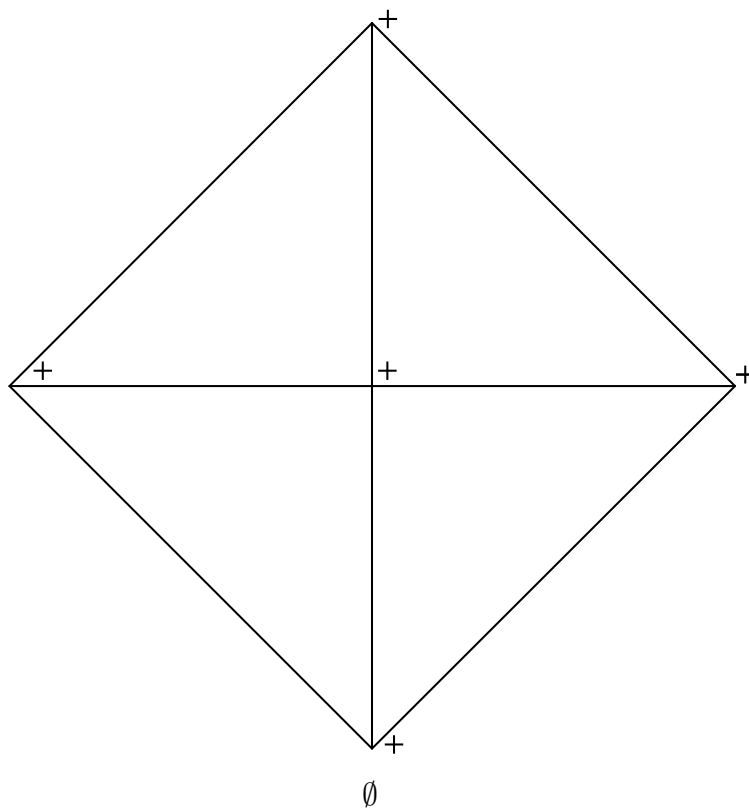
Ein weiterer naheliegender Aspekt der Viro-Methode ist es, den kombinatorischen Teil einem Computerprogramm zu überlassen, das sämtliche Triangulationen und sämtliche Verteilungen von Vorzeichen durchprobiert. Ein solches Programm gibt es nach unserem Wissen bisher nicht. Schwierigkeiten dürfte vor allem die Triangulation bereiten, sowohl was das Problem angeht, alle Triangulationen eines Polygons zu finden, als auch festzustellen, ob sie regulär sind. Ohne gedankliche Vorarbeit, d.h. mit einem Brute-Force-Ansatz, wird wohl selbst bei niedrigen Graden ein Computer schnell überfordert sein.

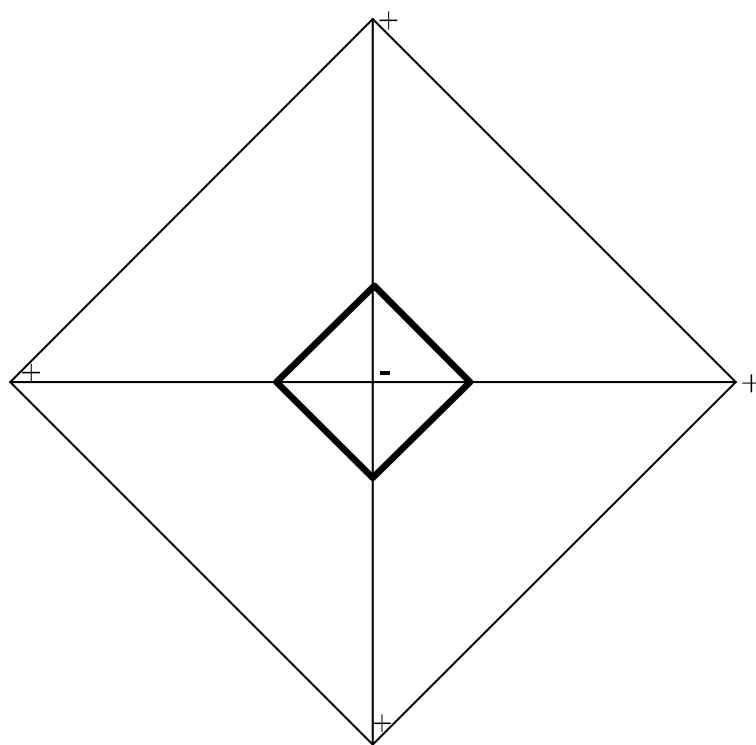
Anhang: Konstruktionen

Es folgt hier die Liste der mit der Viro-Methode konstruierten Kurven: Zunächst die Kurven in \mathbb{P}^2 , erkennbar daran, daß das Quadrat, das \mathbb{P}^2 darstellt, auf der Spitze steht, und daß die Polynome Grad 6 haben; daran schließen sich die Polynome vom Grad (4,4) in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, einem aufrecht stehenden Quadrat, an.

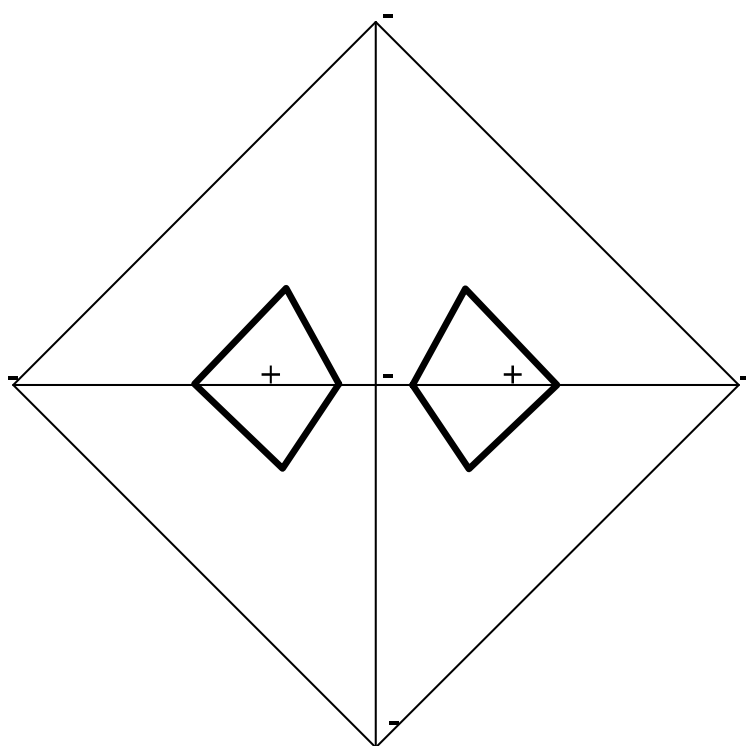
Während das Augenmerk bei den Kurven in \mathbb{P}^2 auf Vollständigkeit lag - es sind alle Kurven aufgeführt, deren Konstruktion dem Autor gelang - , beschränken sich die Kurven in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf einige exemplarische Beispiele vornehmlich mit größerer Zahl an Zusammenhangskomponenten. Da die 'fehlende' Kurve (siehe Kapitel IV, Satz 4.92) auf diese Weise auch nicht konstruiert werden konnte, sind die letzten Beispiele im Hinblick auf die Realisierung reeller K3-Flächen gewissermaßen redundant; nichtsdestotrotz ist die Methode interessant genug, um auch ihnen Beachtung zu schenken.

Die Regularität der folgenden Triangulationen läßt sich mit Hilfe von Satz 4.96 in Kapitel IV überprüfen; in der Regel ist nur die Regularität eines zentralen Teilpolygons kritisch: In diesem Fall wird auf den entsprechenden Baustein aus Kapitel IV verwiesen.

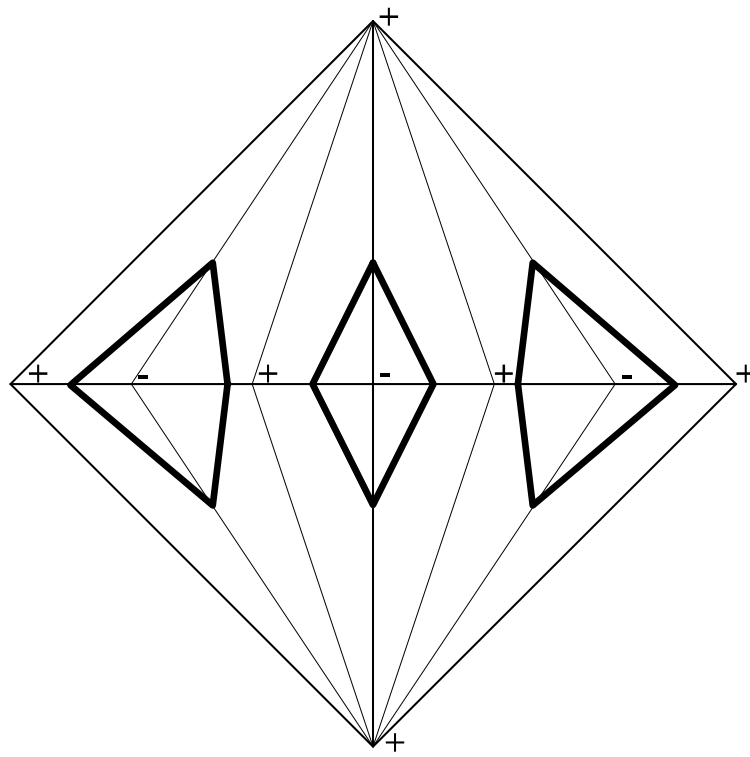
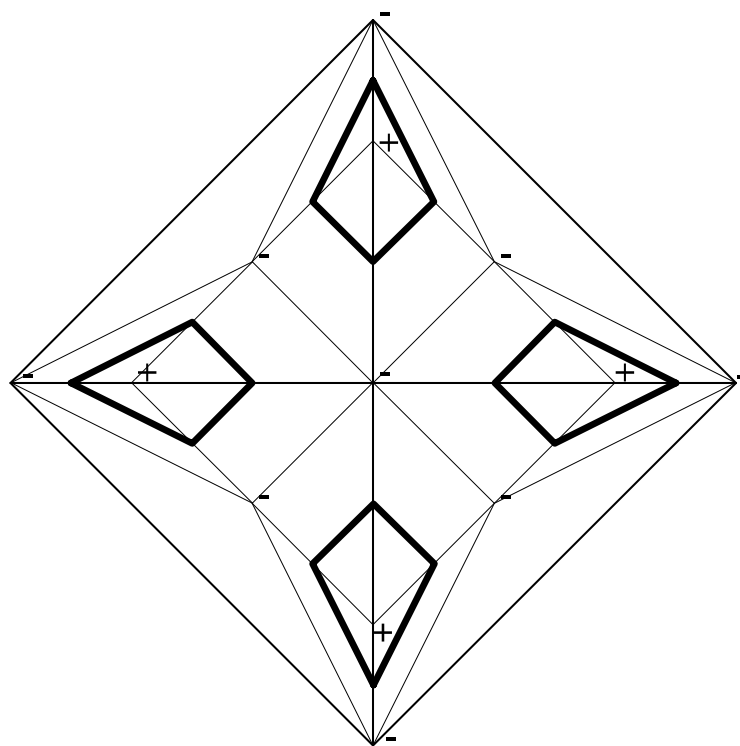


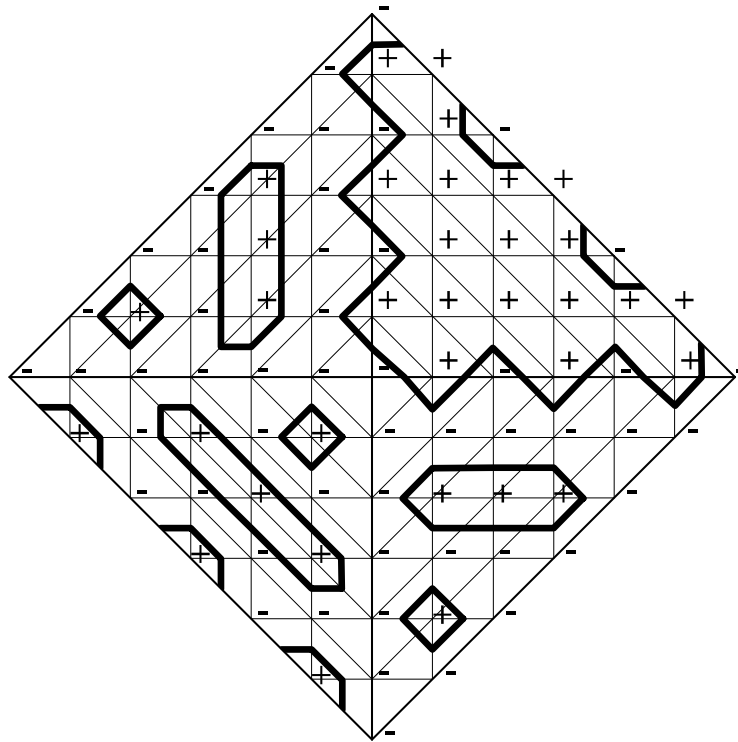
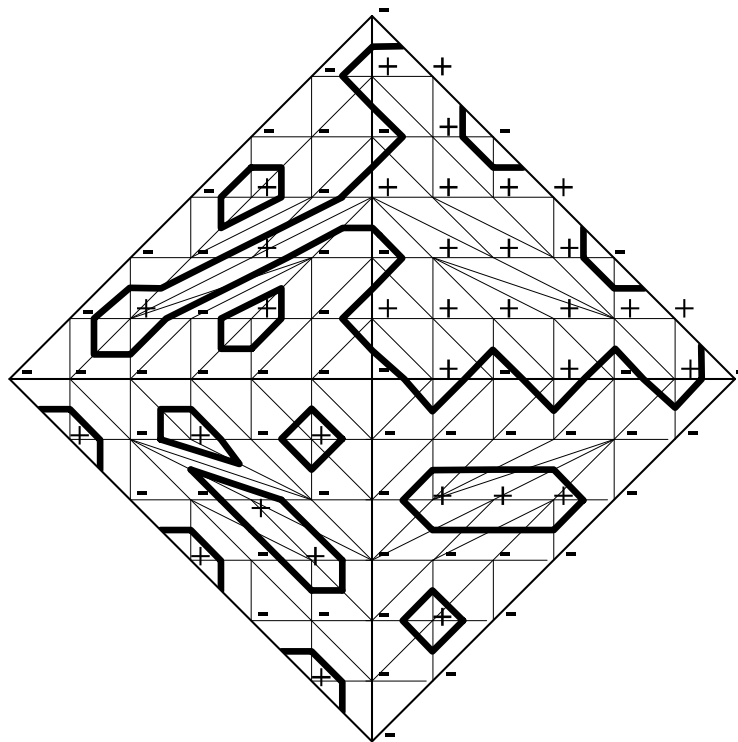


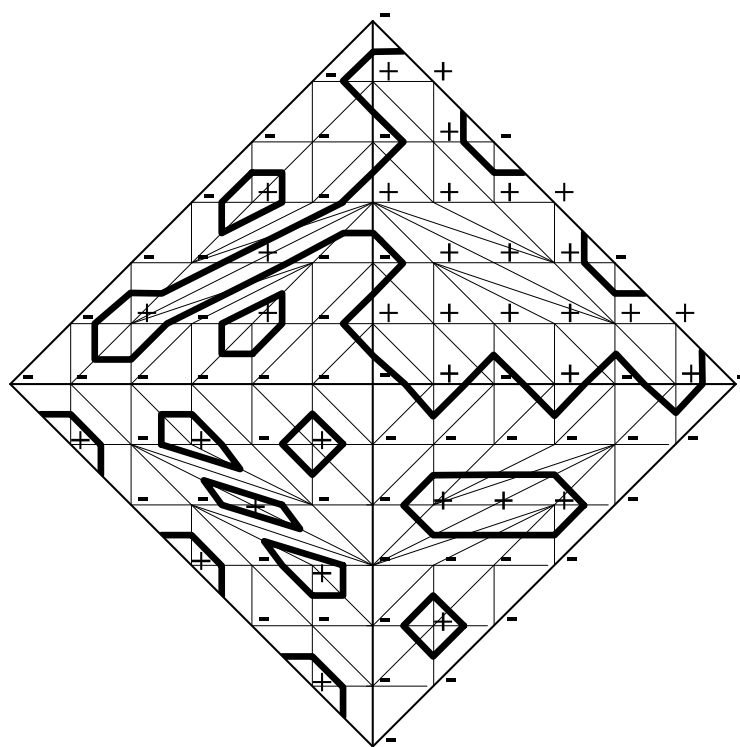
(1)



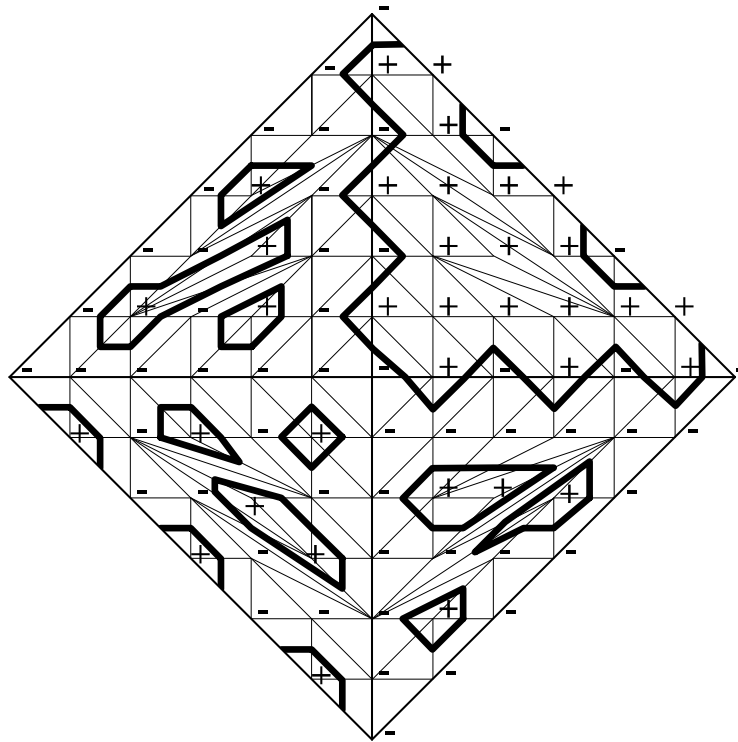
(2)

 $\langle 3 \rangle$  $\langle 4 \rangle$

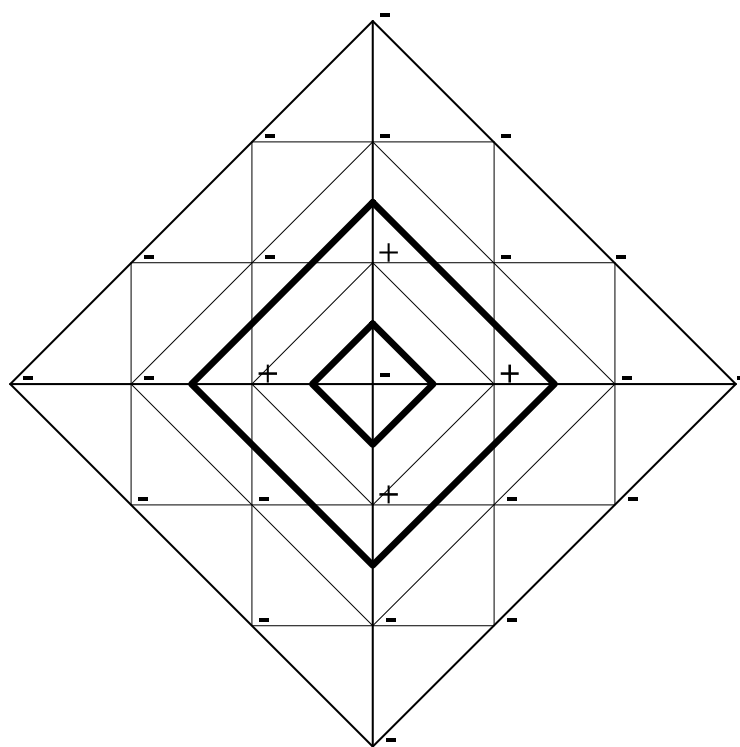
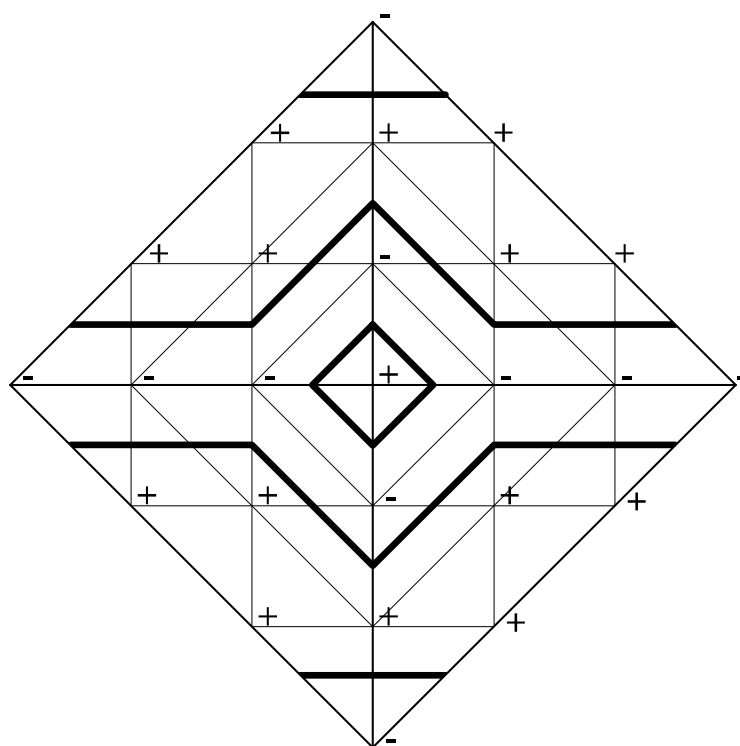
 $\langle 7 \rangle$  $\langle 8 \rangle$

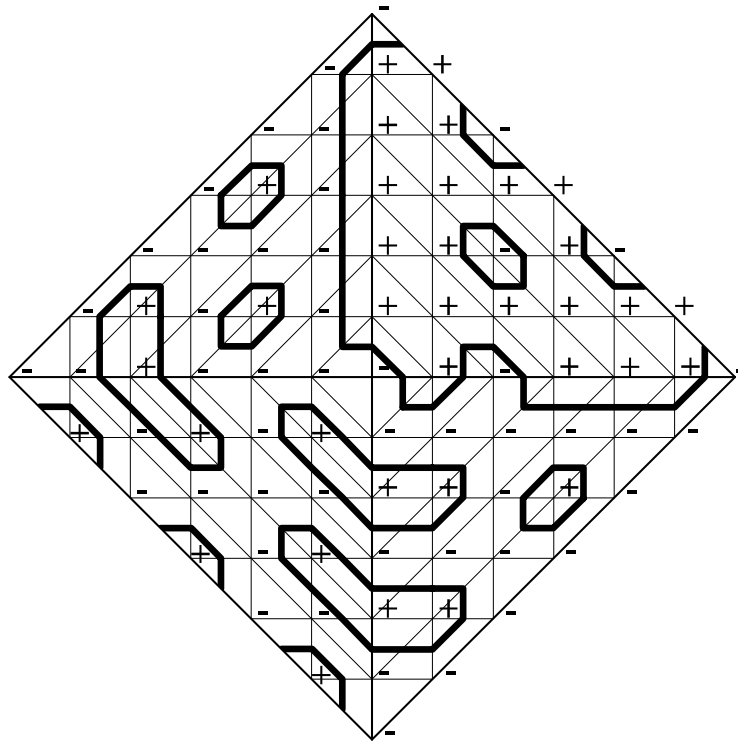
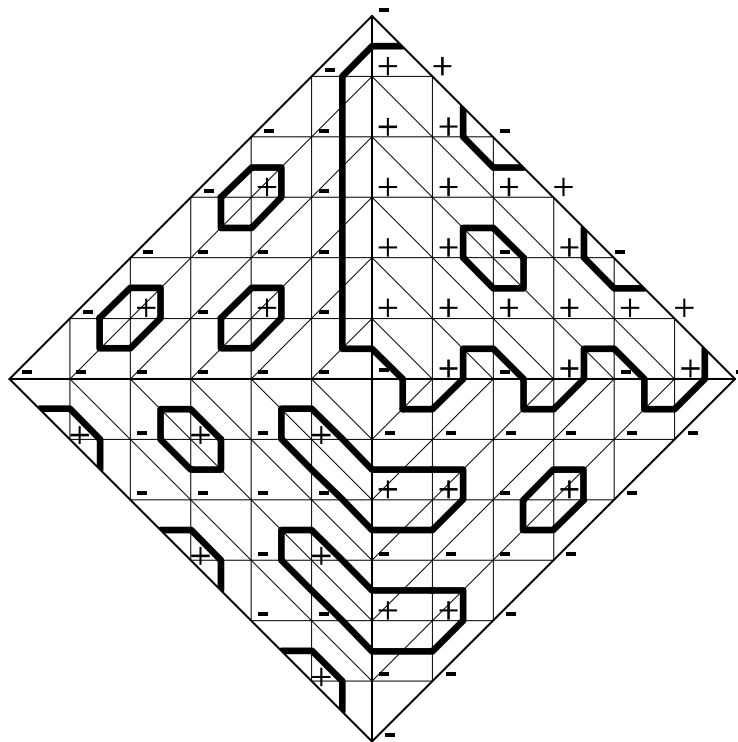


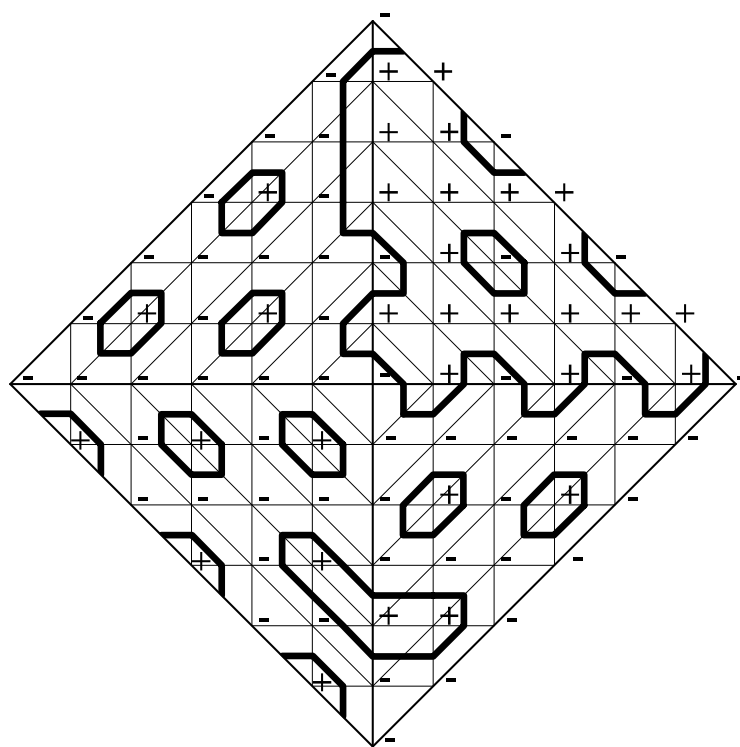
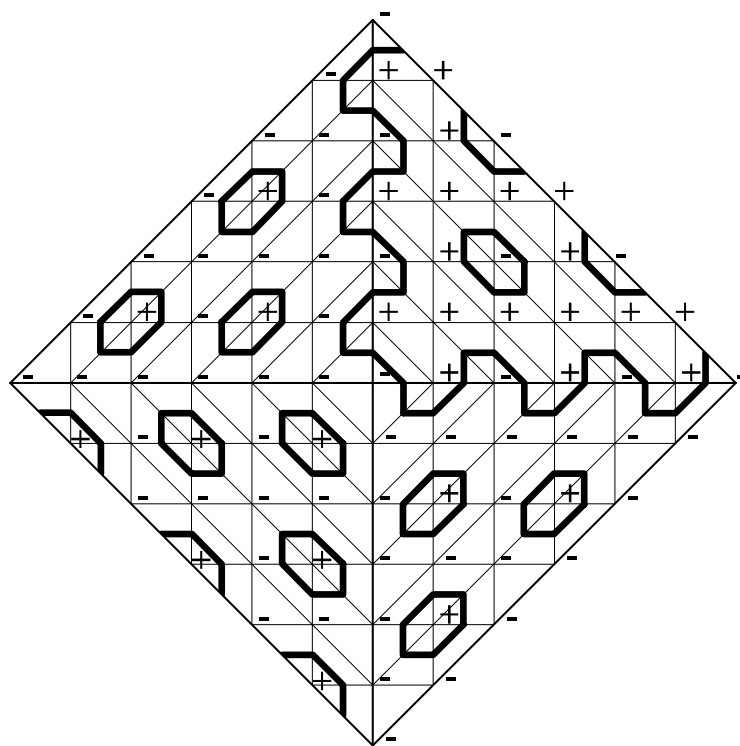
(9)

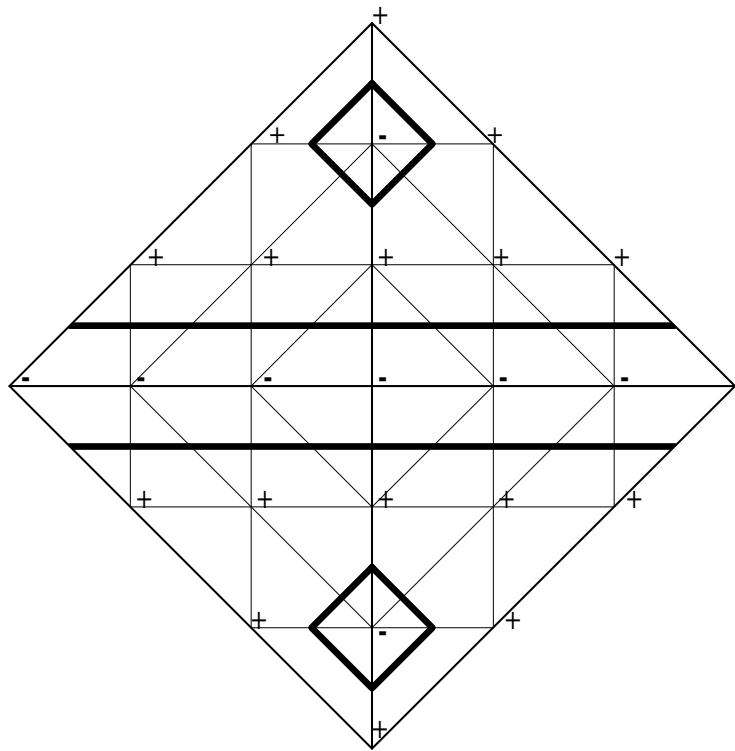
 $\langle 10 \rangle$

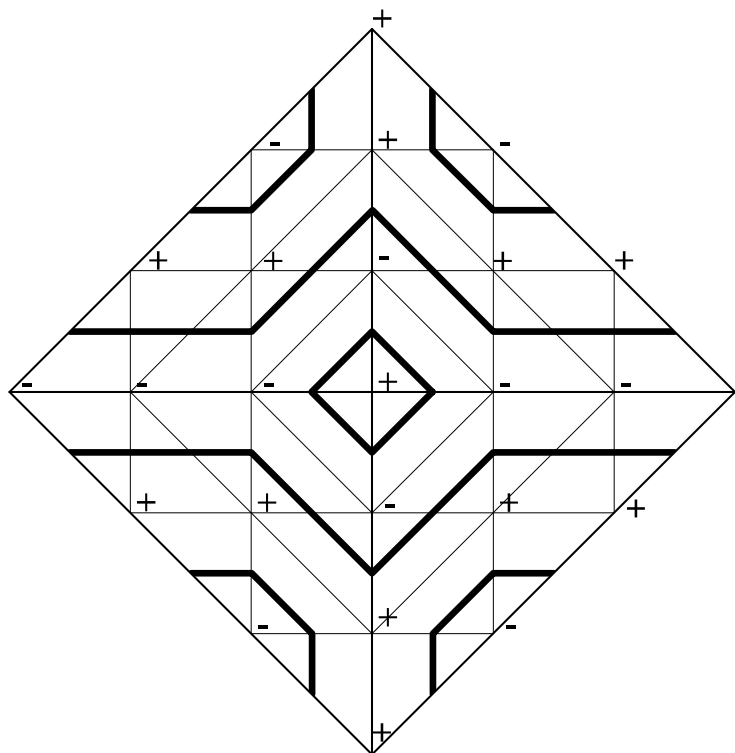
Regulär durch Baustein (B2).


 $\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$

 $\langle 1 \amalg 1\langle 1 \rangle \rangle$

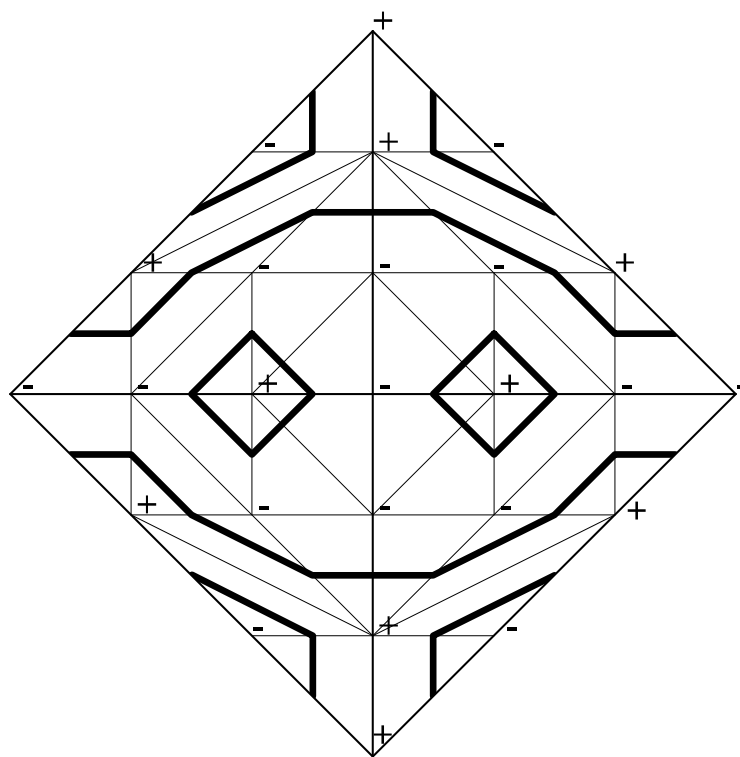

 $\langle 6 \text{ II } 1(1) \rangle$

 $\langle 7 \text{ II } 1(1) \rangle$

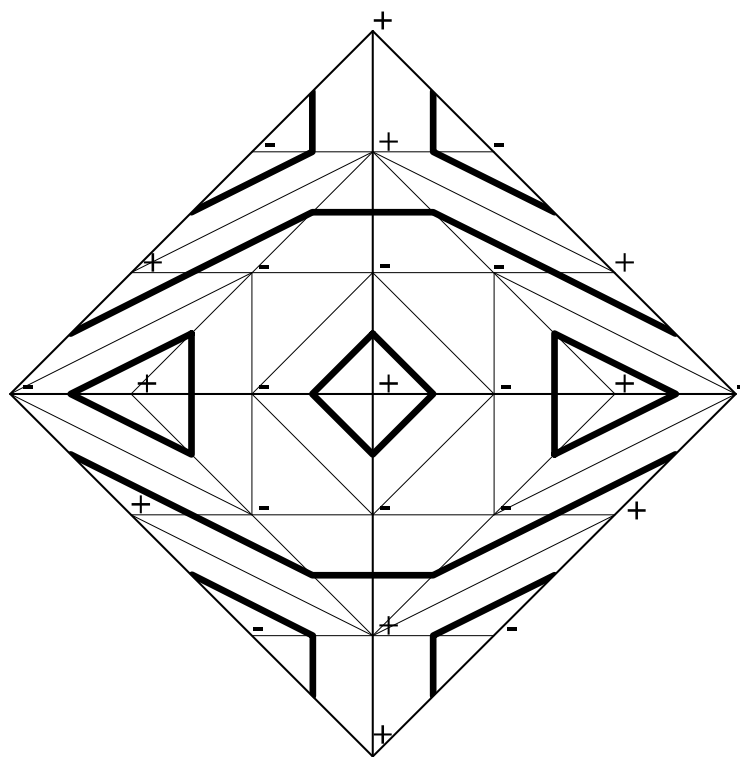

 $\langle 8 \text{ II } 1(1) \rangle$

 $\langle 9 \text{ II } 1(1) \rangle$



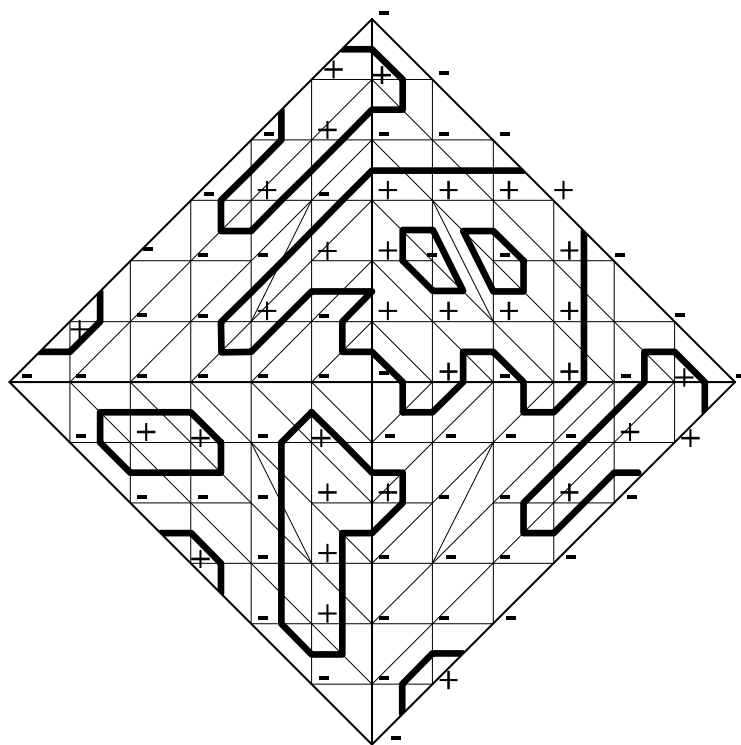
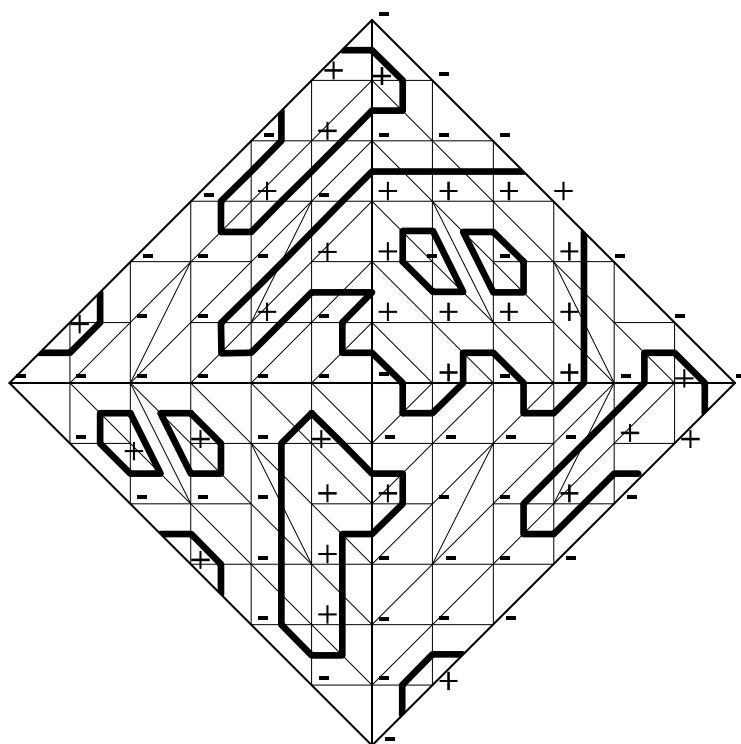
$$\langle 1 \langle 2 \rangle \rangle$$


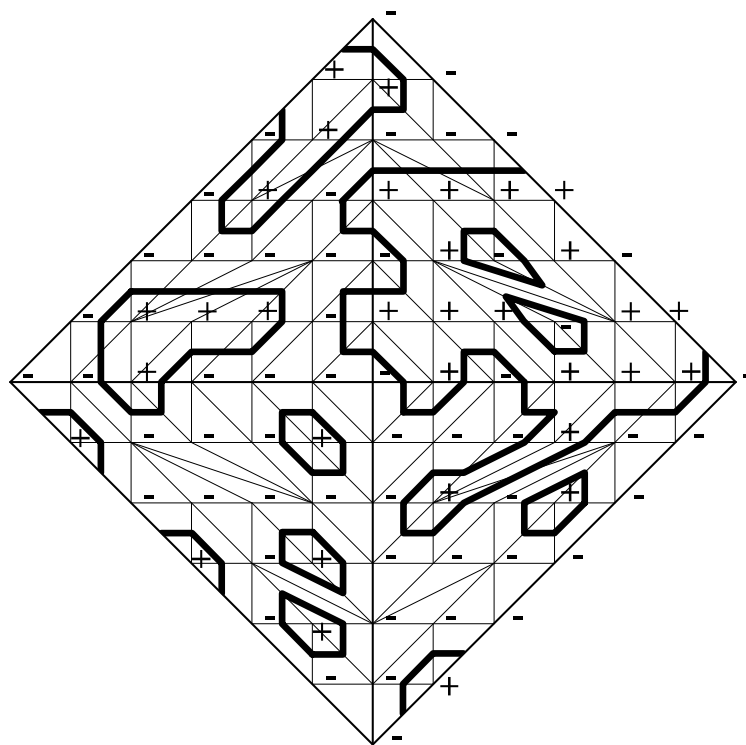
$$\langle 1 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle$$



$$\langle 2 \Pi 1(2) \rangle$$


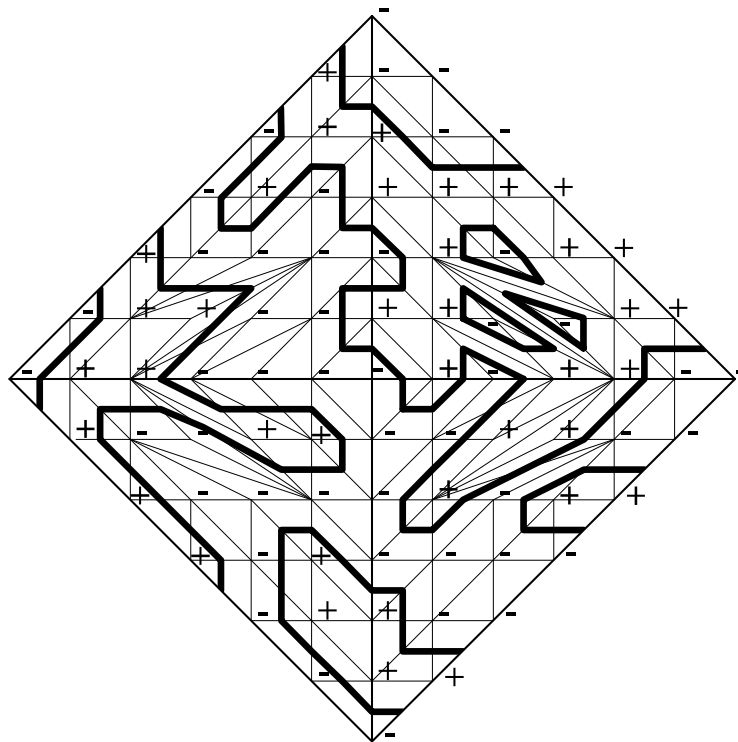
$$\langle 3 \Pi 1(2) \rangle$$

 $\langle 4 \Pi 1 \langle 2 \rangle \rangle$  $\langle 5 \Pi 1 \langle 2 \rangle \rangle$

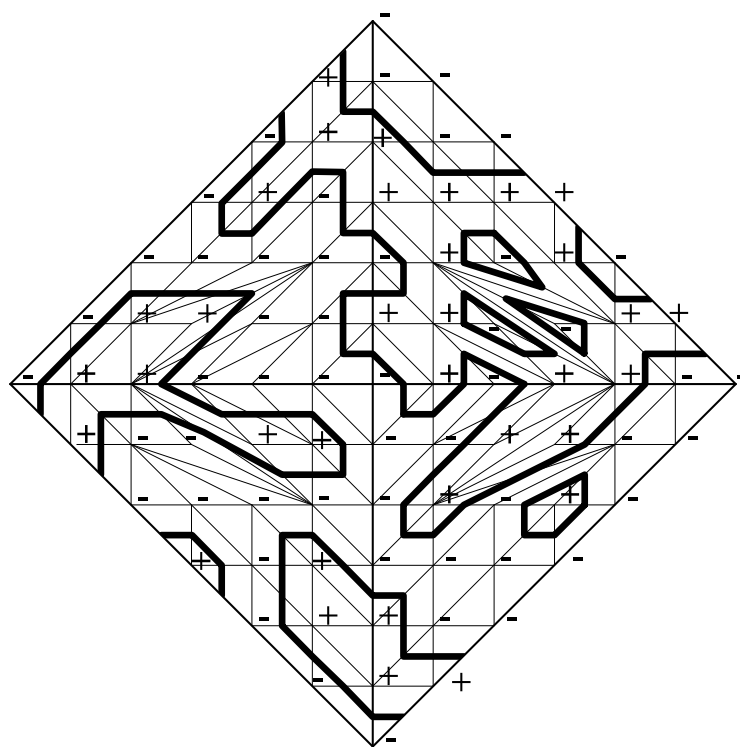


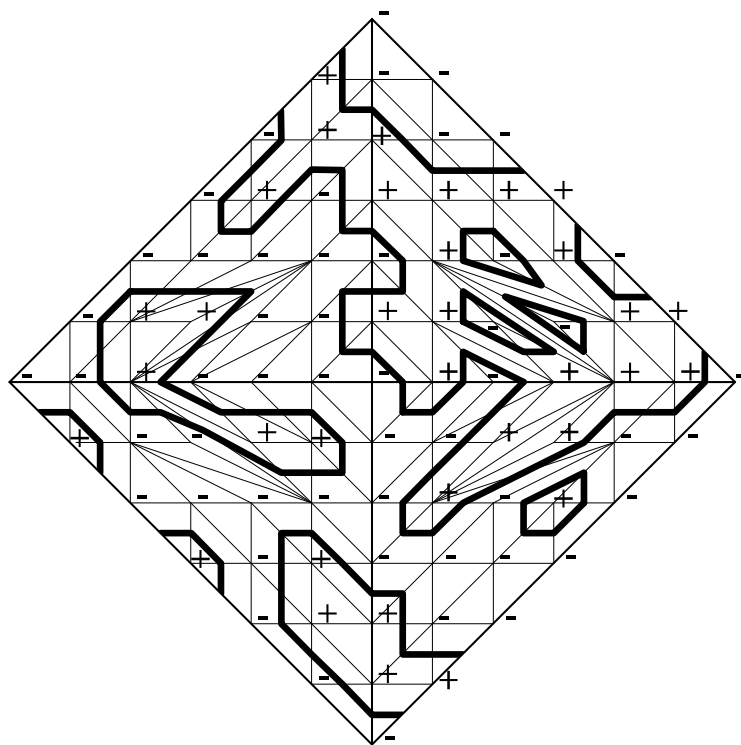
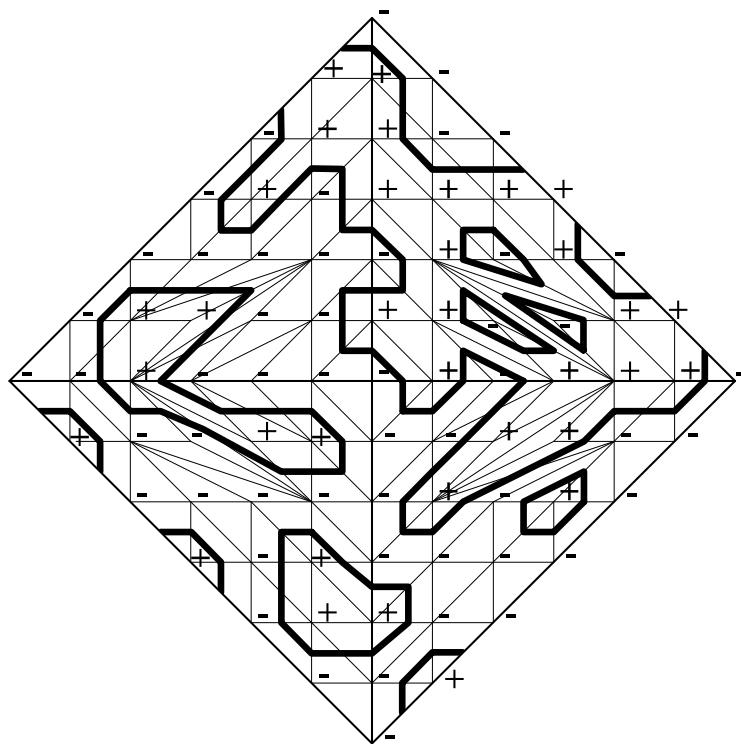
$\langle 6 \Pi 1 \langle 2 \rangle \rangle$

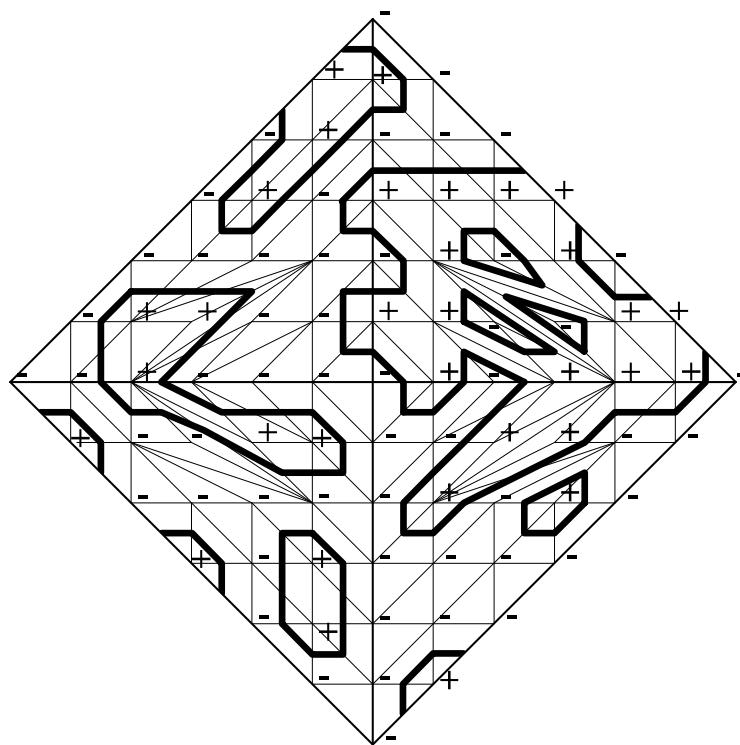
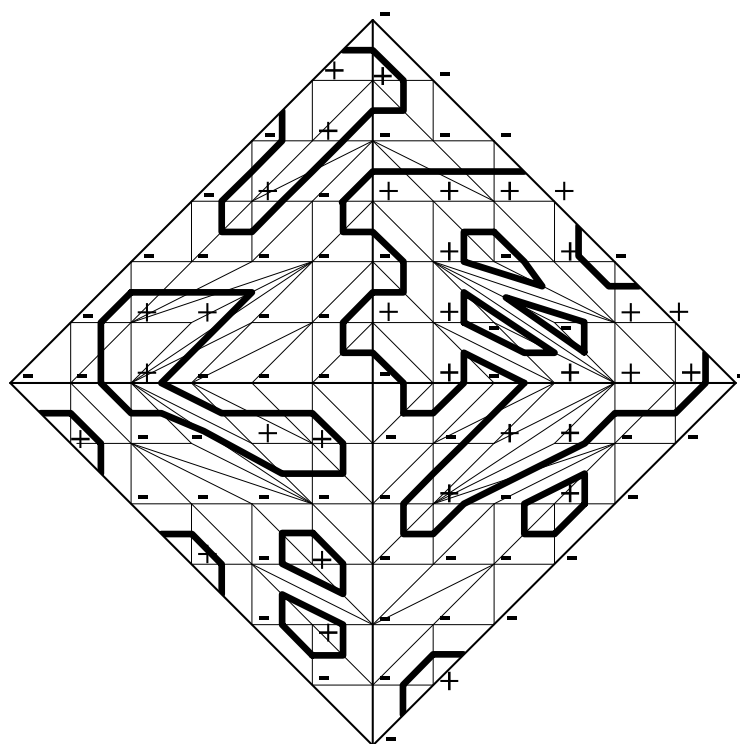
Die Triangulationen der Kurven mit dem Schema $\langle n \text{ II } 1\langle 3 \rangle \rangle$ sind regulär durch den Baustein (B3).

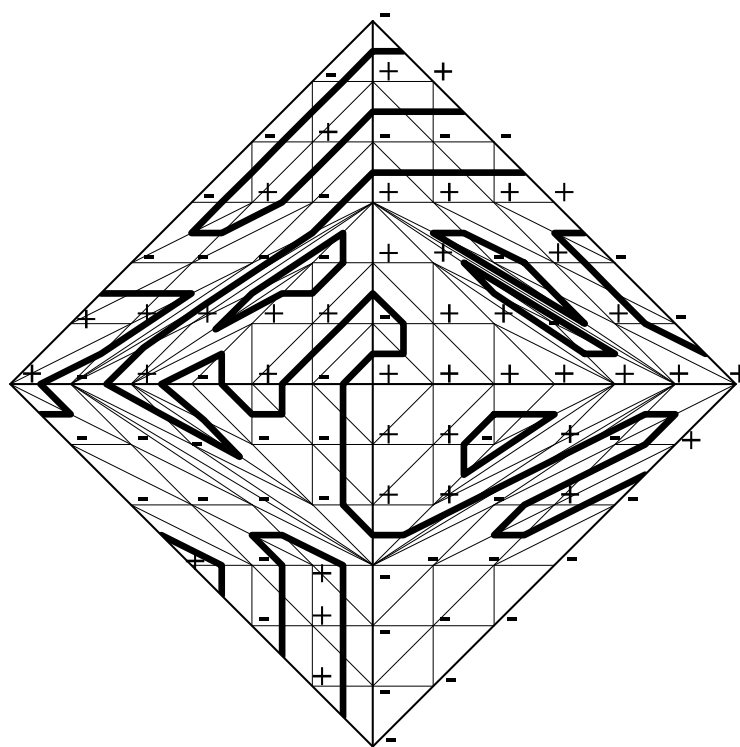


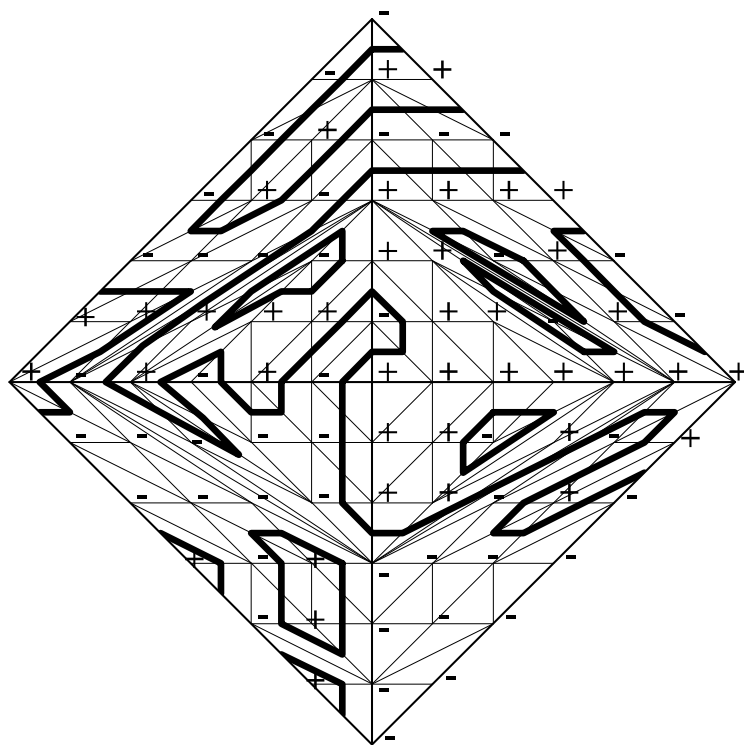
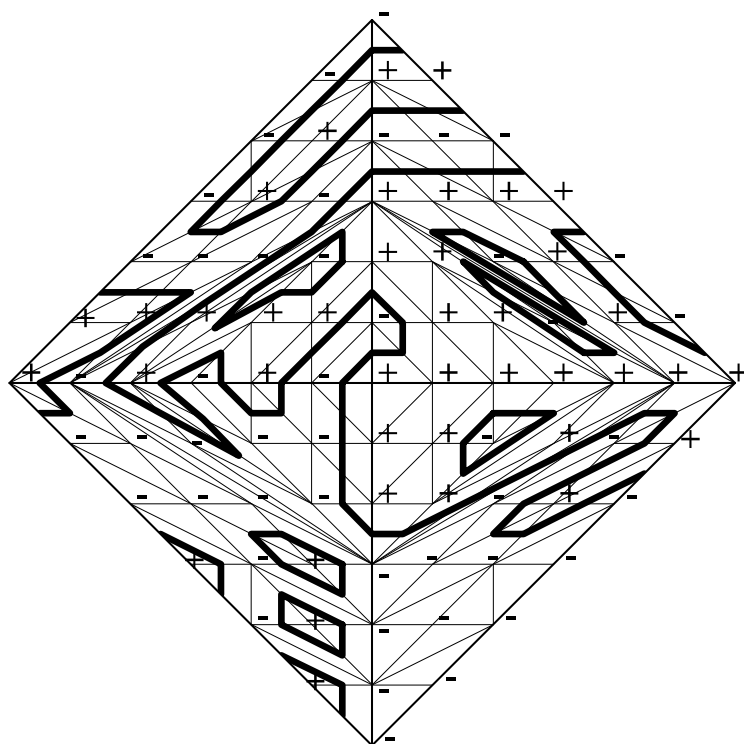
$\langle 1\langle 3 \rangle \rangle$

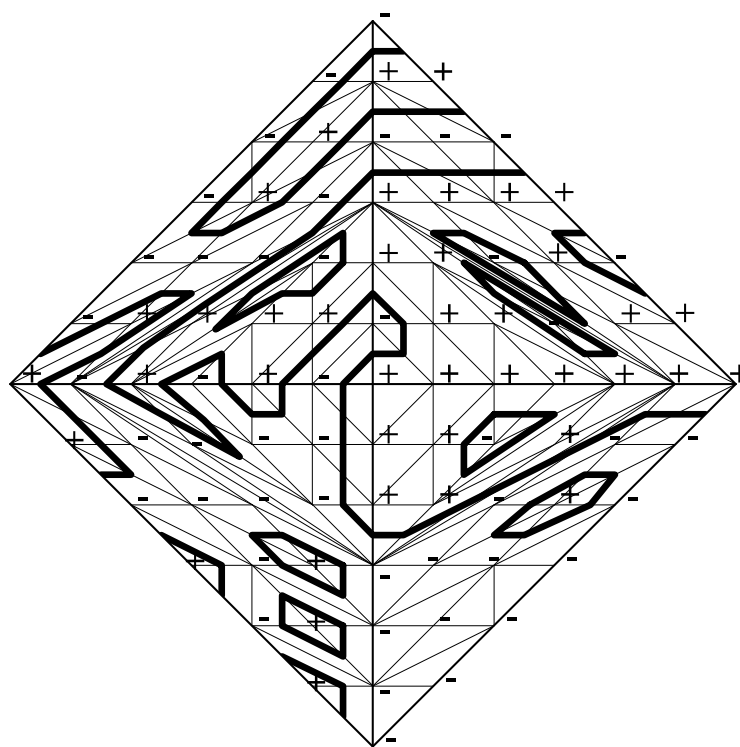
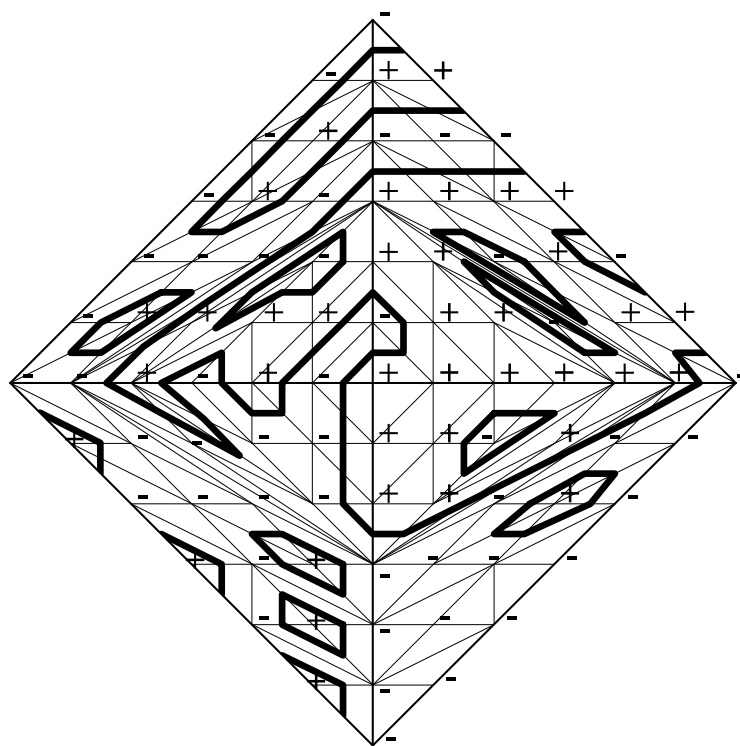
 $\langle 1 \Pi 1(3) \rangle$

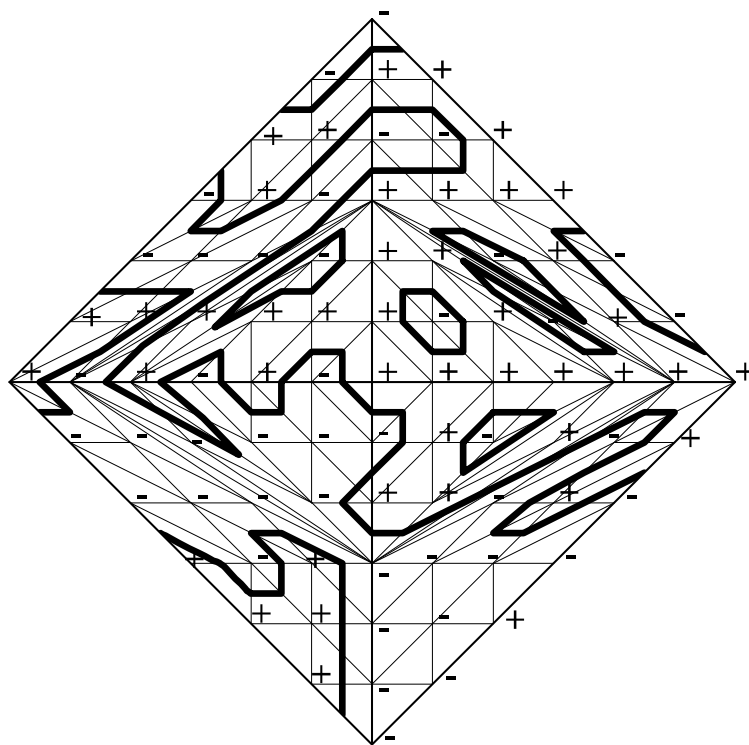
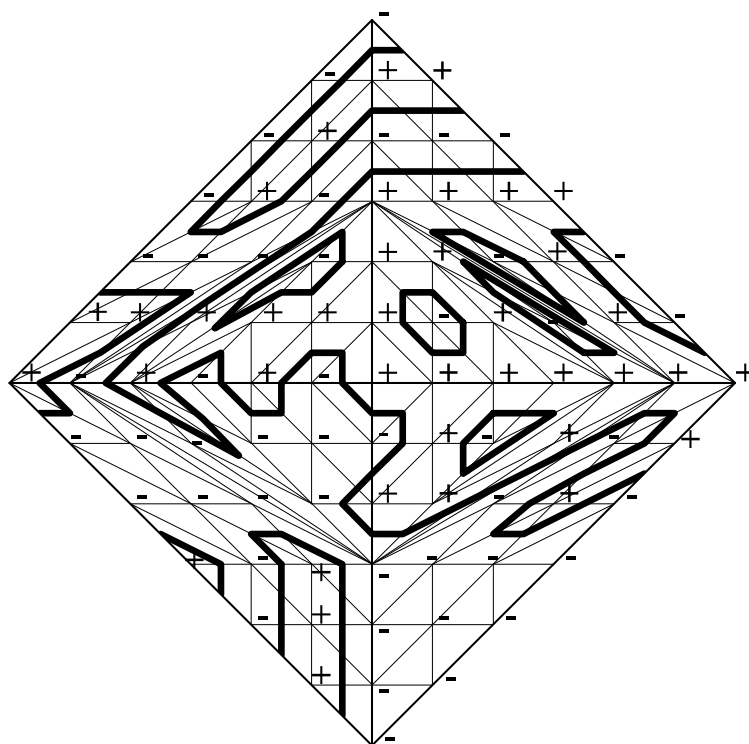
 $\langle 2 \Pi 1(3) \rangle$  $\langle 3 \Pi 1(3) \rangle$

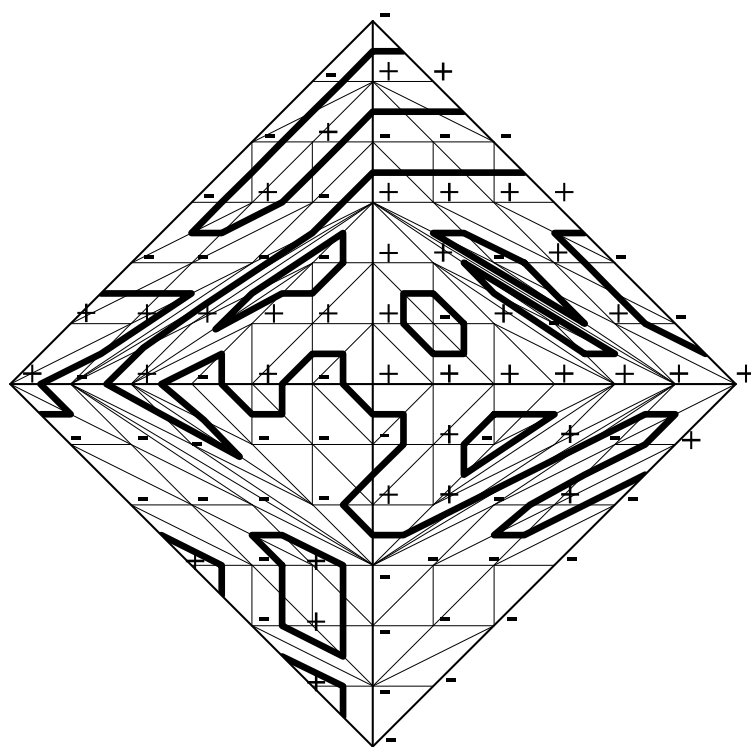
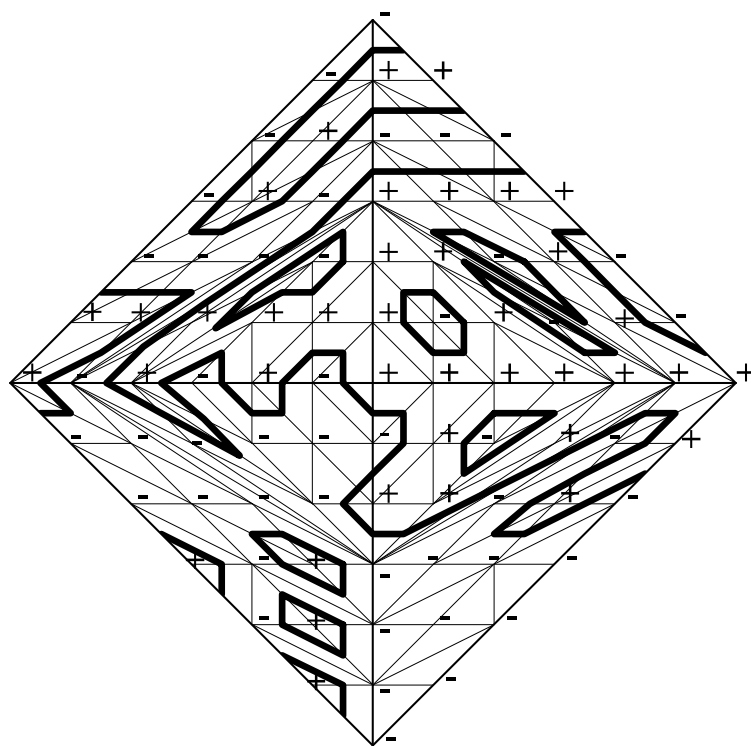
 $\langle 4 \Pi 1(3) \rangle$  $\langle 5 \Pi 1(3) \rangle$

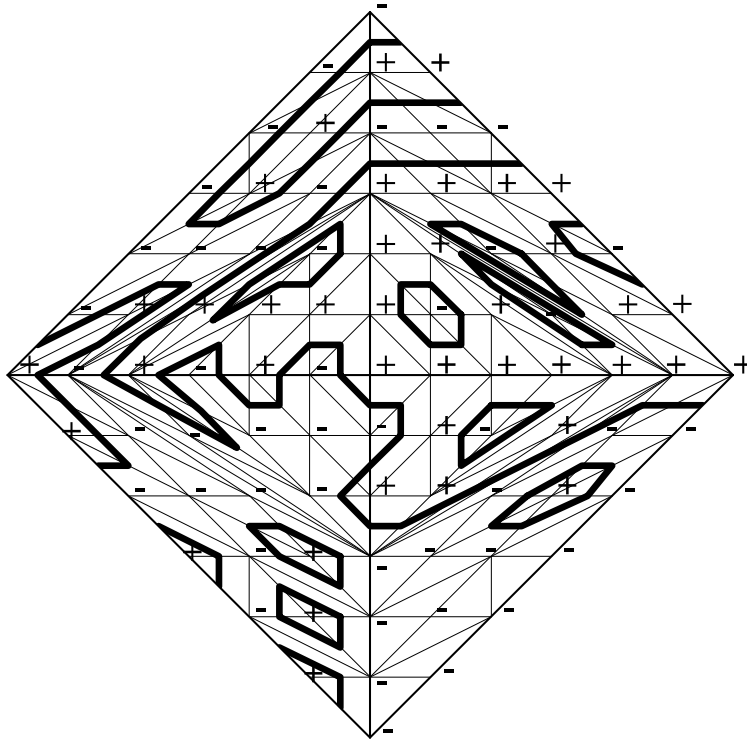
 $\langle 1 \text{ II } 1(4) \rangle$

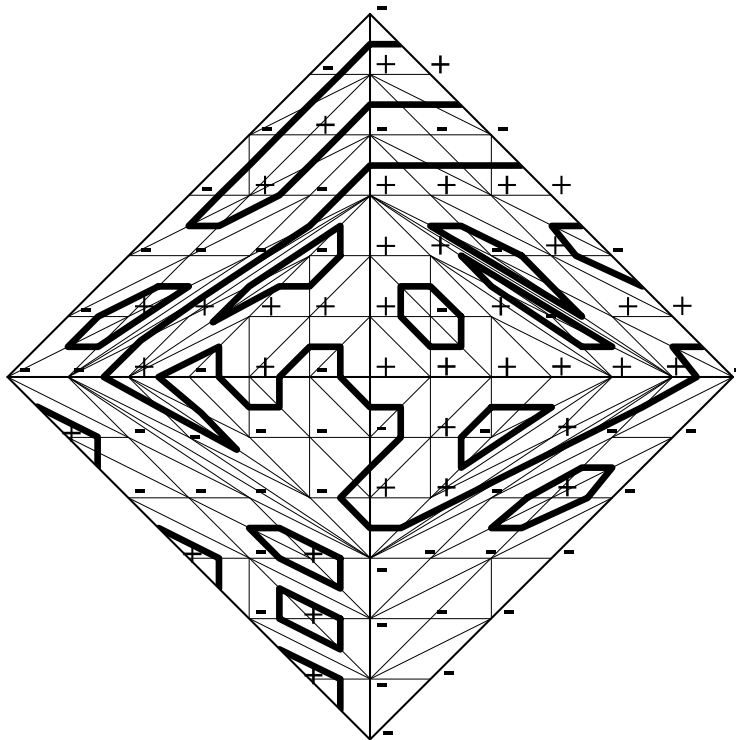
 $\langle 2 \Pi 1 \langle 4 \rangle \rangle$  $\langle 3 \Pi 1 \langle 4 \rangle \rangle$

 $\langle 4 \Pi 1(4) \rangle$  $\langle 5 \Pi 1(4) \rangle$

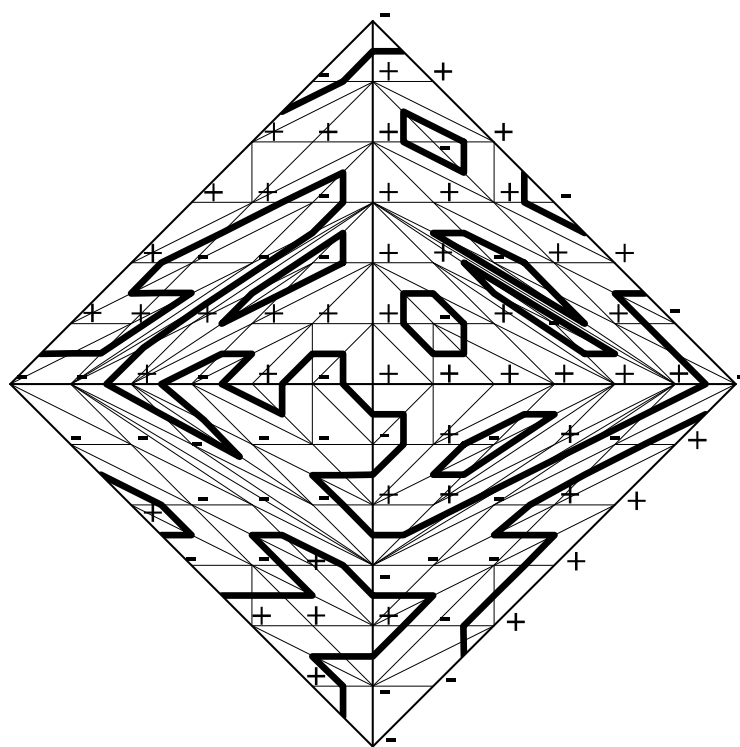
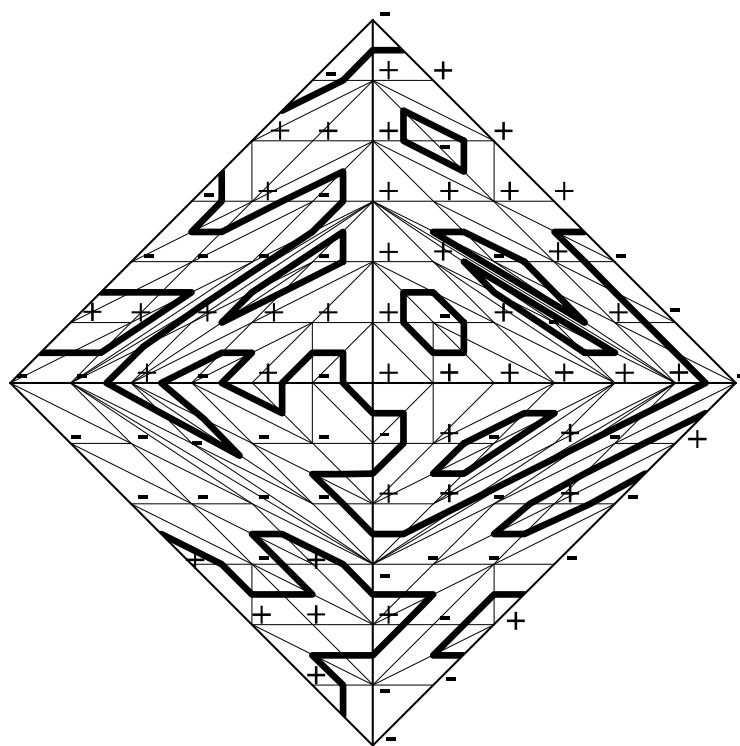

 $\langle 1(5) \rangle$

 $\langle 1 \amalg 1(5) \rangle$

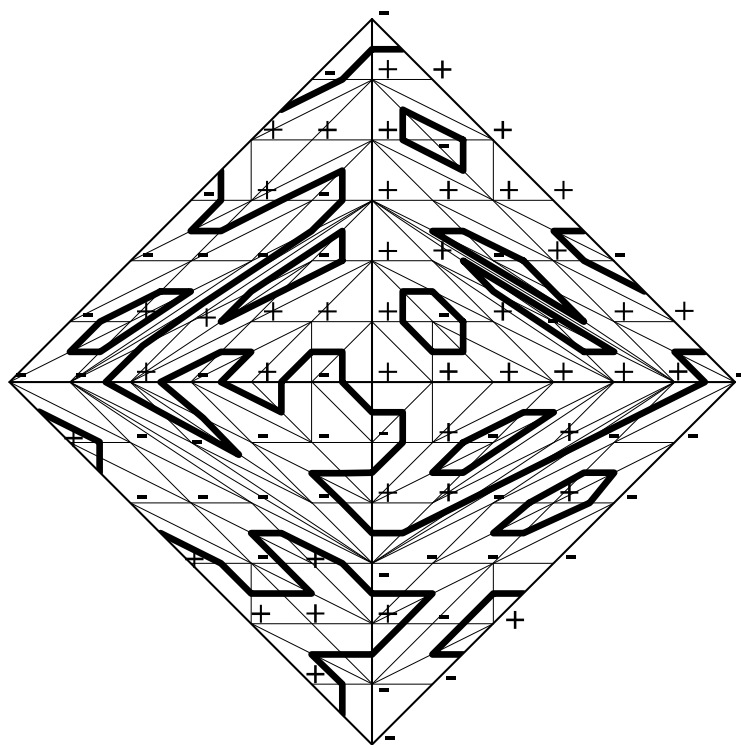
 $\langle 2 \Pi 1(5) \rangle$  $\langle 3 \Pi 1(5) \rangle$

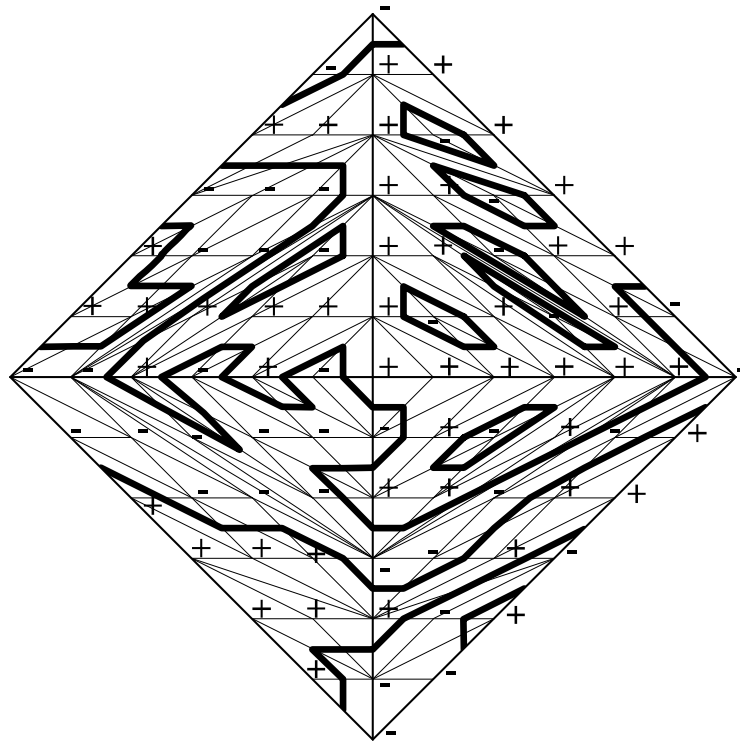


$$\langle 4 \Pi 1(5) \rangle$$


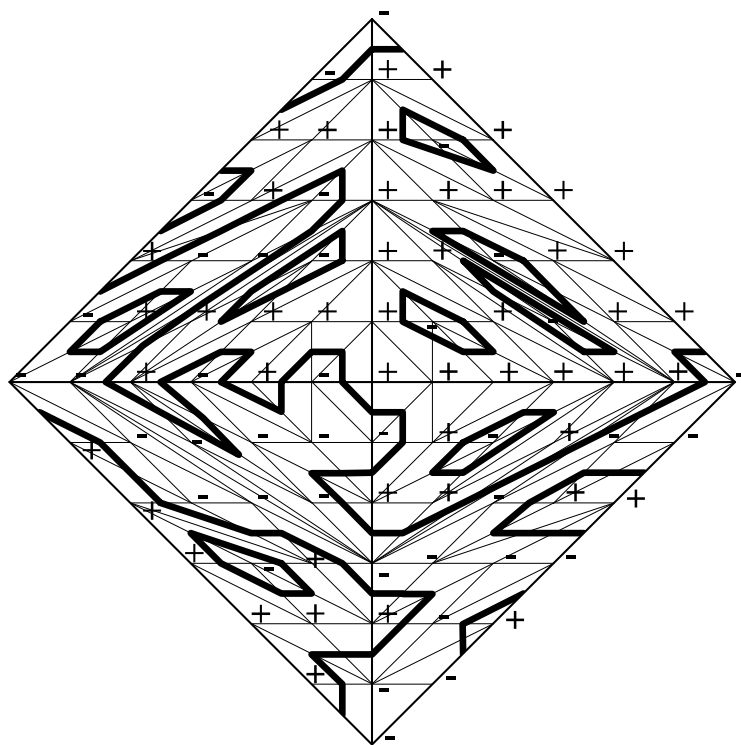
$$\langle 5 \Pi 1(5) \rangle$$

 $\langle 1(6) \rangle$  $\langle 1 \Pi 1(6) \rangle$

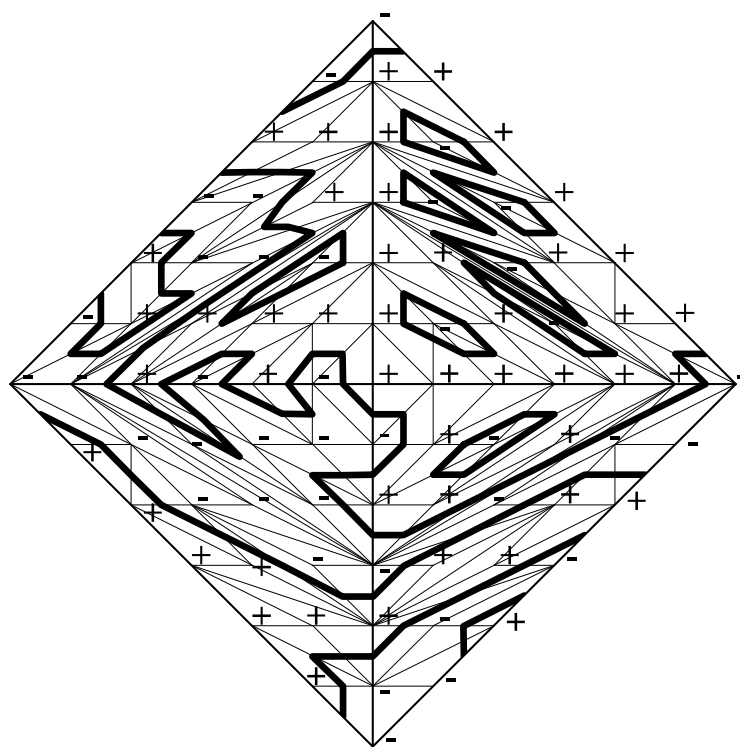
 $\langle 2 \Pi 1(6) \rangle$

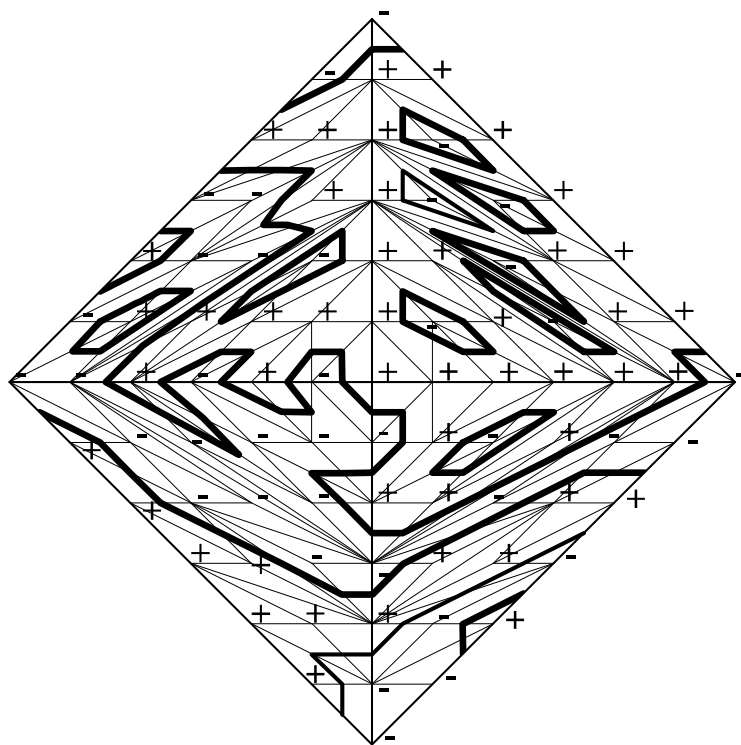

 $\langle 1\langle 7 \rangle \rangle$

Zentraler Baustein fast identisch zu (B1) (unwesentliche Änderung).

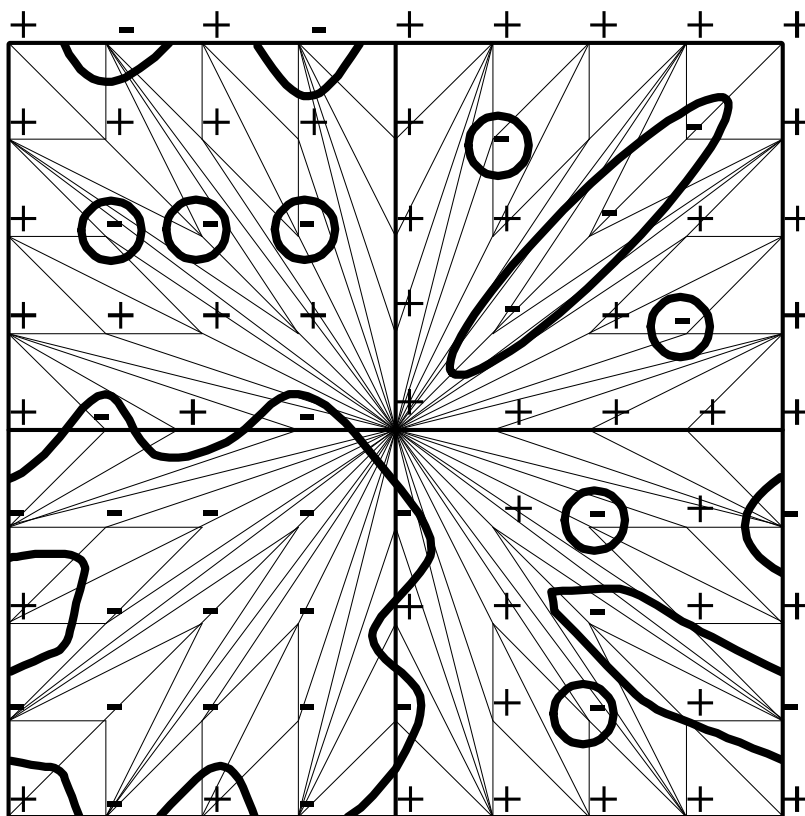
 $\langle 1 \text{ II } 1 \langle 7 \rangle \rangle$

Regulär durch Baustein (B1').

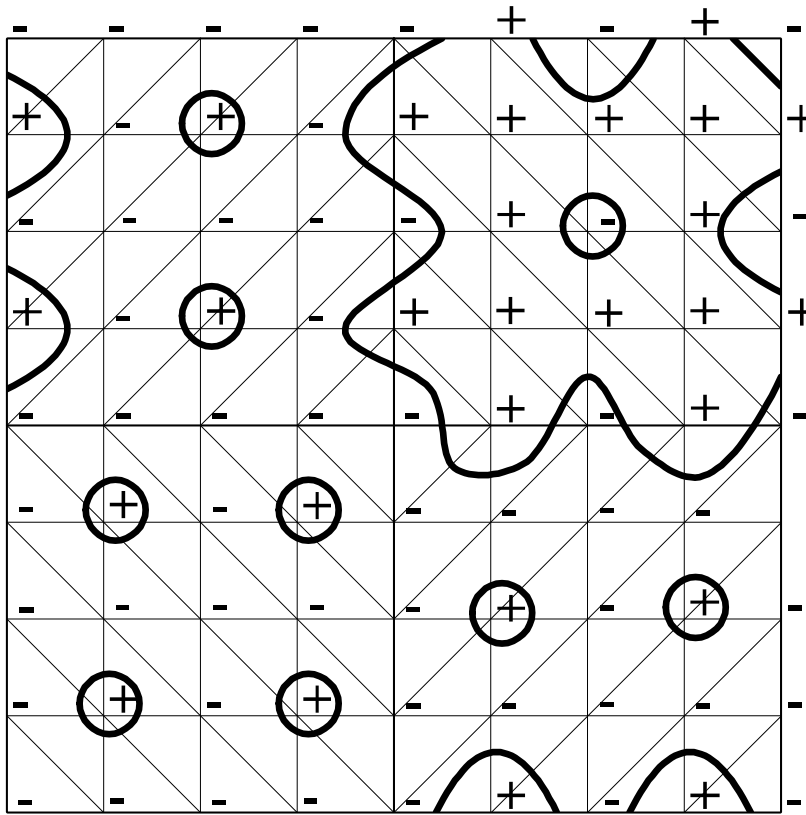
 $\langle 1(8) \rangle$

 $\langle 1 \text{ II } 1 \langle 8 \rangle \rangle$

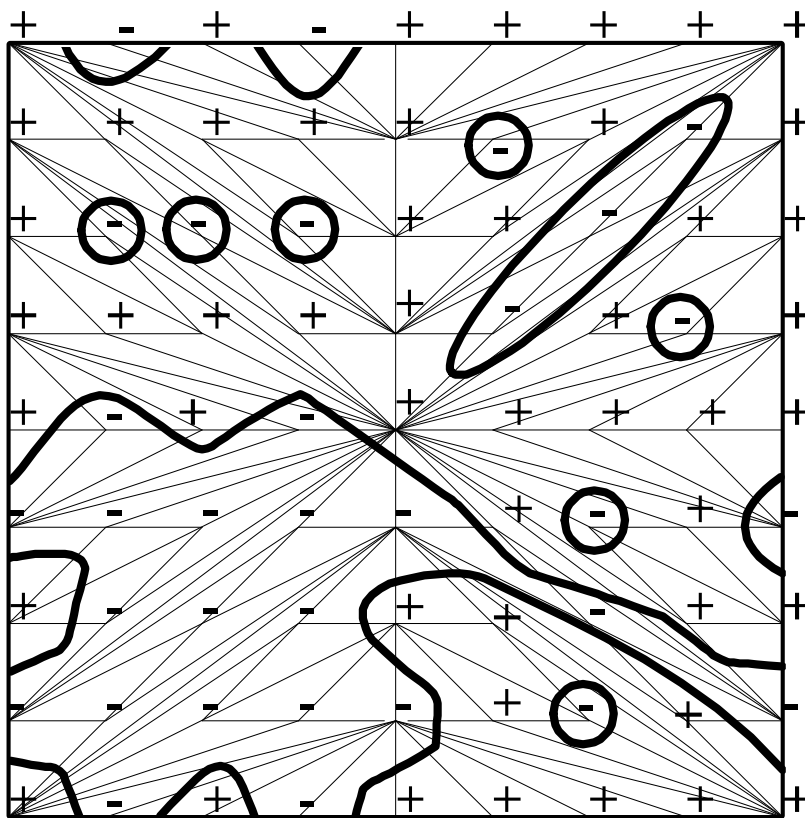
Beide Triangulationen sind regulär durch Baustein (B1).



(9)



$$\langle 8 \Pi 1(1) \rangle$$



$$\langle 8 \text{ II } J^2 \rangle$$

Literaturverzeichnis

- [DK] A. DEGTYAREV, M. V.KHARLAMOV: Topological properties of real algebraic varieties: du coté de chez Rokhlin. In: *Uspechi matematicheskikh nauk* 55:4 (2000), S. 129–212. – Englische Übersetzung in *Russian Math. Surveys* 55:4, S. 735-814
- [DFN I] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV: *Modern Geometry - Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer-Verlag, 1984
- [DFN II] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV: *Modern Geometry - Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. Springer-Verlag, 1985
- [DFN III] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV: *Modern Geometry - Methods and Applications. Part III. Introduction to Homology Theory*. Springer-Verlag, 1990
- [Ful] W. FULTON: *Introduction to toric varieties*. Princeton, NJ : Princeton Univ. Pr., 1993. – 2. korrigierte Auflage 1997
- [GKZ] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKIJ: *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser, 1994
- [Gud] D.A. GUDKOV: The topology of curves of degree 6 and surfaces of degree 4. In: *Uchen. Zap. Gorkov. Univ.* 87 (1969). – Englische Übersetzung in *Transl. AMS* 112
- [Har] A. HARNACK: Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. In: *Math. Ann.* 10 (1876), S. 189–199
- [Hatch] A. HATCHER: *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, 2002
- [ItVi] I. ITENBERG, O. VIRO: Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture. In: *The Mathematical Intelligencer* 18:1 (1996), S. 19–28
- [Kras] V. A. KRASNOV: Harnack-Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties. In: *Math. USSR izvestija* 22 (1984), S. 247–275

- [Pls] Séminaire Palaiseau : *Astérisque*. Bd. 126: *Géométrie des Surfaces K3: Modules et Périodes*. Paris : Soc. Math. de France, 1985
- [ShaSurf] I.R. SHAFAREVICH: *Algebraic surfaces*. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1967
- [ShaBas] I.R. SHAFAREVICH: *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1974
- [Sil] R. SILHOL, A. DOLD (Hrsg.), B. ECKMANN (Hrsg.): *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1392: *Real algebraic surfaces*. Springer-Verlag, 1989
- [ViPW] O. VIRO: Patchworking Real Algebraic Varieties. In: *Preprint Uppsala University U.U.D.M Report 42* (1994) – <http://www.math.uu.se/~oleg/pw.ps>
- [ViGlue] O. VIRO: Glueing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degree 6 and 7. In: *Lecture Notes in Math.* 1060 (1984), S. 187–200
- [ViCtrl] O. VIRO: Plane real algebraic curves: constructions with controlled topology. In: *Algebra i analiz* 1:5 (1989), S. 1–73. – Englische Übersetzung in *Leningrad Math J.* 1:5, S. 1059–1134.
- [ViPos] O. VIRO: Mutual Position of Hypersurfaces in Projective Space. In: *Amer. Math. Soc. Transl.* 186:2 (1998), S. 161–176
- [ViCTop] O. VIRO: The early topological study of real algebraic plane curves. (2000). – <http://www.math.uu.se/~oleg/crav1.ps>
- [Welsch] Jean-Yves WELSCHINGER: Introduction aux surfaces K3 et d’Enriques. (1996). – http://enslyon.free.fr/rapports/maths/Jean-Yves_Welschinger_2.ps.gz

Liste der Bezeichnungen

D^n	Einheitskugel im \mathbb{R}^n
S^n	Oberfläche der Einheitskugel D^{n+1} im \mathbb{R}^{n+1}
T_g	g -Torus
$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$	n -dimensionaler projektiver Raum
A_i	offene Mengen in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, homöomorph zu \mathbb{K}^n
A_{ij}	offene Mengen in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$, homöomorph zu \mathbb{K}^n
$T_x X$	Tangentialraum von X an x
$T_x^* X$	Kotangentialraum von X an x
$V(f_1, \dots, f_n)$	algebraische Varietät, Nullstellen der Polynome f_1, \dots, f_n
$\overline{V(f)}$	Kompaktifizierung der affinen algebraischen Varietät $V(f)$
\mathbb{K}	Körper
$\mathbb{K}[X]$	Raum der regulären Funktionen auf X
$\mathbb{K}(X)$	Raum der rationalen Funktionen auf X
$\Omega[X]$	Raum der regulären Differentialformen auf X
$\Omega(X)$	Raum der rationalen Differentialformen auf X
$\text{Div}(X)$	Menge der Divisoren auf X
(f)	Hauptdivisor, bestimmt durch Polynom f
$P(X)$	Menge der Hauptdivisoren auf X
(ω)	Durch Differentialform ω bestimmter Divisor
K_X	kanonische Klasse von X
H	Hyperebene (in projektivem Raum)
f^h	Homogenisierung des Polynoms f
f^{bh}	Bihomogenisierung des Polynoms f
J	ebene reelle Kurve, die einen einseitigen Kreis beschreibt
$\langle 4A \amalg 1 \langle 3B \rangle \rangle$	ebene reelle Kurve, die aus 4 Komponenten der Form A und einem Kreis, der 3 Komponenten der Form B enthält, besteht
$\Delta(f)$	Newton-Polygon von f
Γ	Kante eines Polygons
σ	Ecke eines Polygons
$(\Delta_k^{(i)})_{i,k}$	Polygon-Unterteilung in konvexe Polygone
$\text{DC}^-(\Gamma)$	Halbgerade senkrecht auf Kante Γ , nach außen weisend
f^Γ	Koeffizienteneinschränkung auf die Koeffizienten der Monome von f in Γ
$S_{\varepsilon, \delta}$	Spiegelung in \mathbb{R}^2 an den Koordinatenachsen

$Q_{\varepsilon,\delta}$	Quadrant von \mathbb{R}^2
$V_{\varepsilon,\delta}(f)$	Kurve im Quadrant $Q_{\varepsilon,\delta}$
l	Diffeomorphismus von $Q_{\varepsilon,\delta}$ nach \mathbb{R}^2
ν	(streng) konvexe Funktion auf einer Polygon-Unterteilung
γ	Weg
$\pi_1(X)$	Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X
Δ^k	k -Simplex
$\partial\Delta^k$	Randabbildung auf dem Simplex Δ^k
c_k	k -Kette
c^k	k -Kokette
$H_k(X, G)$	k -te Homologiegruppe von X bezüglich der Gruppe G
$H^k(X, G)$	k -te Kohomologiegruppe von X bezüglich der Gruppe G
$B_k(\mathbb{K})$	k -te Betti-Zahl bezüglich des Körpers \mathbb{K}
B_k	k -te Betti-Zahl bezüglich \mathbb{Q}
$\chi(X)$	Eulercharakteristik von X
h^k	Dimension von $H^k(X, \mathbb{Z})$
$h^{p,q}$	Dimension von $H^{p,q}(X, \mathbb{Z})$
S	komplexe Konjugation
$X_{\mathbb{C}}$	komplexe algebraische Fläche über \mathbb{R}
$X_{\mathbb{R}}$	Fixpunktmenge der komplexen Konjugation auf $X_{\mathbb{C}}$
λ	$\dim(1 + S)H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
b	$\dim \text{Fix}_S(H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$
$\overline{X_f^+}$	Bereich in \mathbb{R}^n , wo $f \geq 0$
$\overline{X_f^+}$	Bereich in einer Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n , wo $f \geq 0$
Y_f	doppelte Überlagerung von $\overline{X_f^+}$
$\overline{Y_f}$	doppelte Überlagerung von $\overline{X_f^+}$

